

Interlúdios entre D&C
e algs. gulosos p/
tratar de grafos e algs. aleatorizados

Projeto e Análise de Algoritmos (PAA)

Grafos e o Problema do Corte Mínimo

Grafos são uma estrutura matemática muito estudada

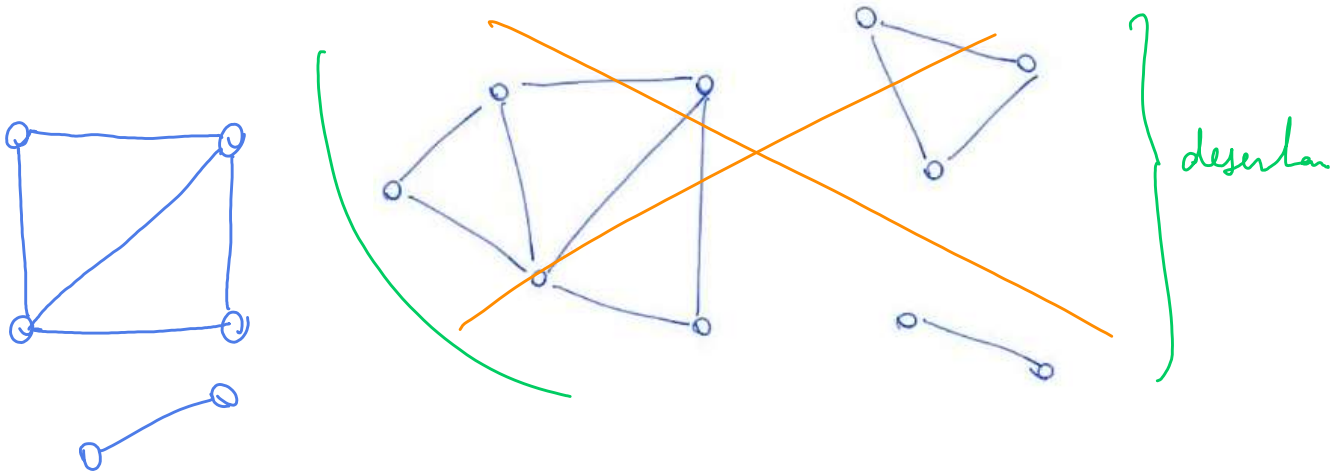
- e um Tipo Abstrato de Dado (TAD) usado para
 - representar relações entre elementos de um conjunto.
- Como todo TAD, precisa ser implementado por alguma estrutura de dados.

representam redes reais,
concretas ou implícitas

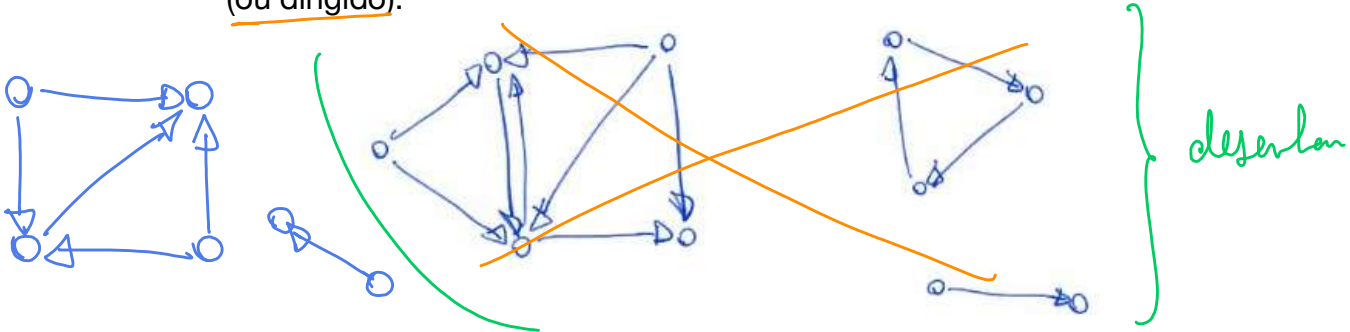
Grafos são formados por dois componentes:

$$G = (V, E)$$

- Um conjunto de vértices (ou nós) V , e um conjunto de pares de vértices E .
- Se estes pares são não ordenados
 - os chamamos de arestas e o grafo é dito não orientado.



- Se os pares são ordenados os chamamos arcos e o grafo é dito orientado (ou dirigido).



Em geral, grafos são representados compactamente como $G = (V, E)$, e usamos

- $n = |V|$ para indicar o número de vértices,
- $m = |E|$ para indicar o número de arestas.

$m = |E|$
 $n = |V|$

Grafos são relevantes tanto na matemática quanto na computação, pois

- conseguem modelar uma grande variedade de cenários, como:
 - Redes físicas (elétrica, comunicações, transportes),
 - redes conceituais (Web, sociais, lógicas, biológicas),
 - estruturas como listas encadeadas e árvores,
 - relações de dependência ou interação (grafo de filmes e atores),
 - mapas, etc.
- Quiz1: quem são os vértices e as arestas (ou arcos) em cada cenário?
 - Quais cenários são não-orientados e quais são orientados?

De modo mais geral, grafos modelam relações entre pares de um mesmo conjunto,

- ou relações entre pares de conjuntos relacionados,
 - o que abre uma imensa gama de possibilidades.

Grafos podem ser densos ou esparsos,

- o que diz respeito ao número de arestas que estes possuem.

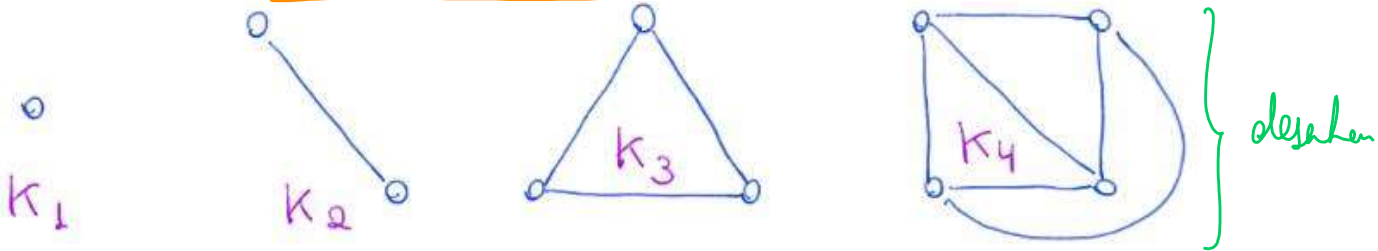
Um grafo não orientado, conexo e sem arestas múltiplas possui:

- No mínimo $n - 1$ arestas, caso em que o grafo é uma árvore

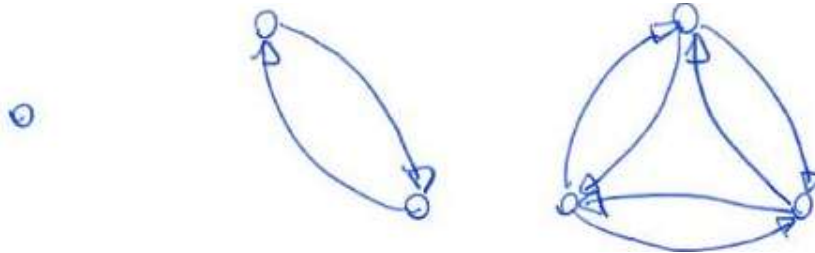


- Quiz2: Por que? Dica: comece sem arestas e vá adicionando até ter um grafo conexo.

- No máximo $(n \text{ escolhe } 2) = n(n - 1) / 2$ arestas, caso de um grafo completo.



- Um grafo orientado completo tem $n(n - 1)$ arcos,
 - i.e., o dobro do não orientado, pois entre cada par de vértices podem ter dois arcos em sentidos opostos.

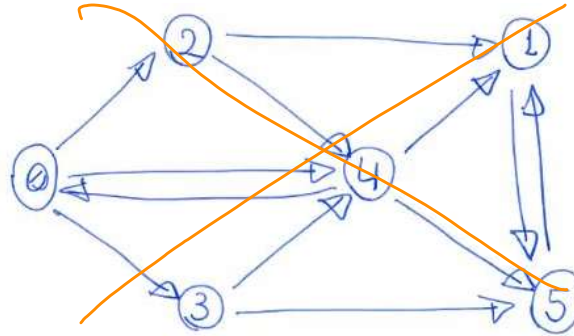


Assim, o número de arestas de um grafo varia entre $O(n)$ até $O(n^2)$.

- Dizemos que um grafo é esparso quando seu número de aresta
 - está próximo a n ou até $n \log n$.
- Dizemos que ele é denso quando o número de arestas
 - está próximo de n^2 ou pelo menos superior $n^3/2 = n * n^{1/2}$.
- Embora, onde passa a linha exatamente seja arbitrário.

Existem duas implementações principais para grafos,

- i.e., duas estruturas de dados usadas para representá-los.
- Em ambas, os vértices são rotulados por inteiros não negativos.

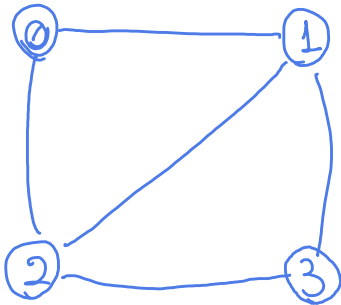


Matriz de adjacência é uma implementação que utiliza uma matriz A

- de 0s e 1s com n linhas e n colunas sendo que o valor da célula $A[i][j]$
 - indica se existe uma aresta/arco entre os vértices i e j .

memória $\Theta(n^2)$

acesso a um par (i, j) $\Theta(1)$



~~Adjacency Matrix for the graph above:~~

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	0	0	1
5	0	1	0	0	0	0

Adjacency Matrix for the graph on the left:

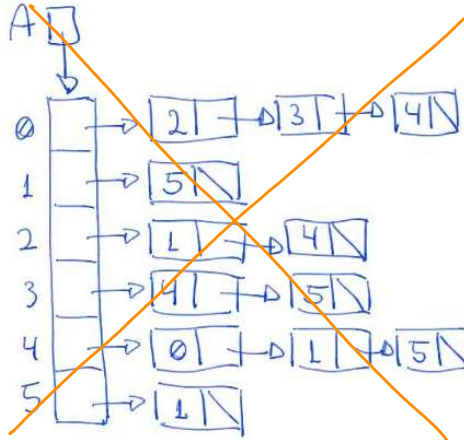
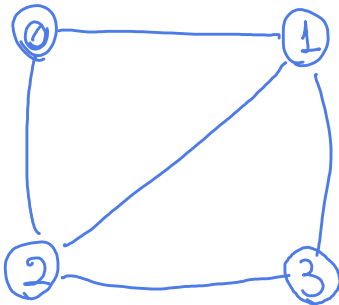
	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	1	0	1	1
2	1	1	0	1
3	0	1	1	0

acesso a todos os vizinhos de um nó $\Theta(n)$

- Assim, a linha i da matriz A representa o leque de saída do vértice i
 - e a coluna j de A representa o leque de entrada do vértice j .
- A diagonal da matriz é preenchida por 0s, pois não temos auto-laços.
- Se o grafo não for orientado, a matriz é simétrica, i.e., $A[i][j] = A[j][i]$.

Listas de adjacência é uma implementação que utiliza

- um vetor A de apontadores de vértices de tamanho n
 - e para cada vértice i temos uma lista ligada iniciada em $A[i]$,
 - com os destinos das arestas que têm origem em i .

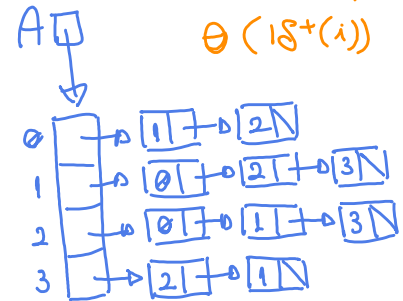


memória $\Theta(m+n)$

acesso arbitrário

a um par (i, j)

$\Theta(18^{+}(i))$



acesso a todos os vizinhos de um nó i

$\Theta(18^{+}(i))$

- Se o grafo não for orientado, dada uma aresta $\{i, j\}$,
 - temos que j será inserido na lista de i
 - e i será inserido na lista de j .

Corte em Grafos

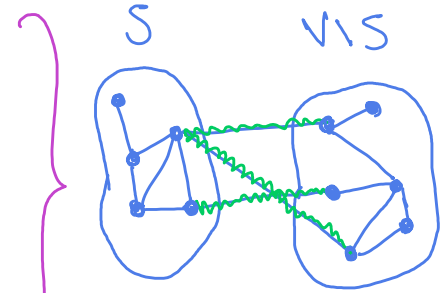
- definição e exemplos

Def.: um corte S de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $S \subset V$ e $S \neq \emptyset$, i.e., S separa os vértices de V em duas partes

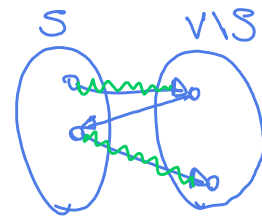
A fronteira do corte S ($\delta(S)$) são as arestas de E que tem um extremo em S e outro em $V \setminus S$

Em grafos dirigidos a fronteira costuma ser as arestas c/ origem em S e destino em $V \setminus S$

Quiz: todo conjunto de arestas é fronteira de algum corte? Ou ao menos está na fronteira de algum corte?



Quiz: qual o # de cortes de um grafo c/ n vértices? R: $2^n - 2$



todos os
conjuntos
exceto V
e $\emptyset$

Problema do Corte Mínimo

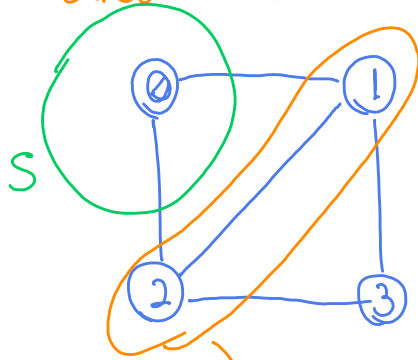
- com exemplos

⊗ Aplicações: - encontrar gargalos/ fragorços p/ desconectar uma rede
 - encontrar clusters razoavelmente isolados em redes sociais
 - segmentar objetos em imagens
 testar produtos

Entrada: um grafo não-orientado $G = (V, E)$ # de arestas atravessando a fronteira de S

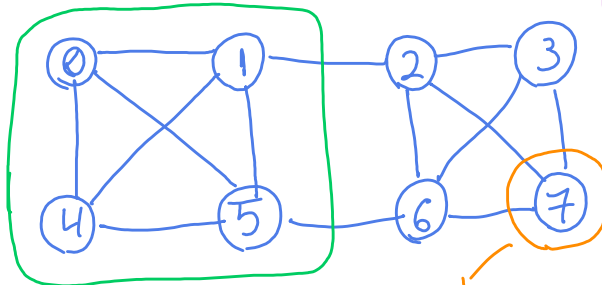
Solução: um corte $S \subset V$: $|S(S)|$ é mínima, i.e.,
 o # de arestas atravessando a fronteira de S
 é $\leq |S(S')|$ p/ qualquer $S' \subset V$ e $S' \neq S$

Encontrar o corte mínimo nos seguintes grafos:



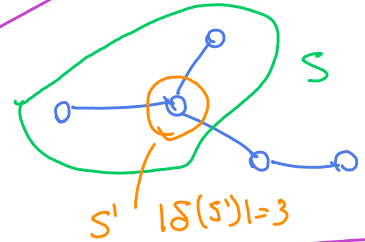
$|S(S)| = 2$

$|S(S')| = 4$



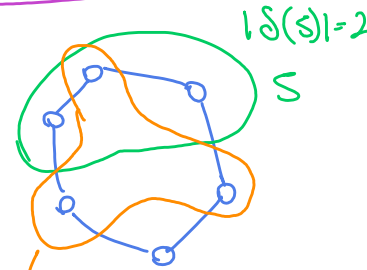
$|S(S)| = 2$

$|S(S')| = 3$



$|S(S)| = 1$

$|S(S')| = 3$



$|S(S)| = 2$

$|S(S')| = 6$

⊗ Obs: o corte mínimo sempre induz um subgrafo conexo. Quis. Por que? //

Algoritmo de Contração Probabilística de Karger

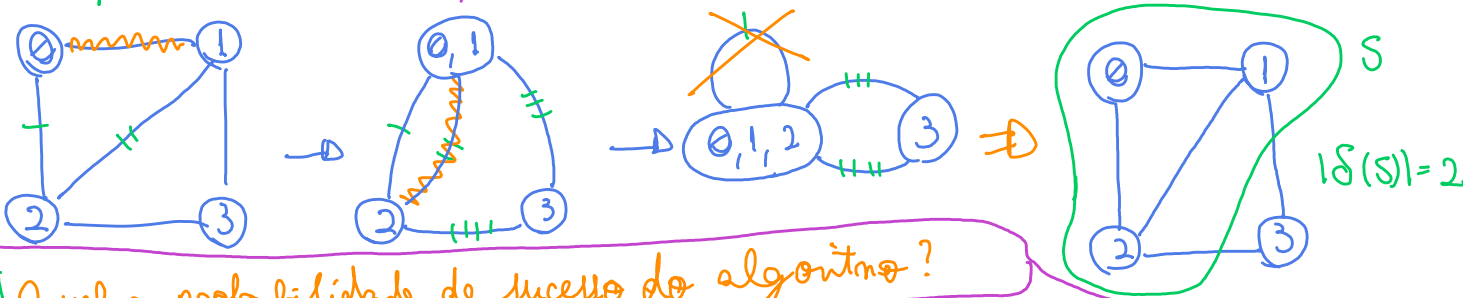
- pseudocódigo e exemplos

enquanto $\# \text{ de vértices} > 2$:

- escolha uma aresta $e = \{u, v\}$ q/ prob. uniforme
 - contraia os vértices u e v , mantendo arestas múltiplas, mas removendo auto-laços que surjam
- devolva o corte S correspondente a um dos vértices restantes

⊗ Intuição: tem mais chances de escolher arestas de corte grandes, pois estas tem mais arestas

⊗ Curiosidade: no exemplo a seguir o corte $S = \{0, 3\}$ não pode ocorrer



⊗ Qual a probabilidade de sucesso do algoritmo?

