Alguns Exercícios do Capítulo 9 - Somatórios

Exercício 9.2:[Soma de PA] Calcule a somatória $\sum_{k=0}^{n-1}(a + rk)$, cujas n parcelas são parte de uma progressão aritmética com termo inicial a e passo r arbitrários.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+rk) = \sum_{k=0}^{n-1} a + r\sum_{k=0}^{n-1} k = n.a + r\left(0+1+2+\dots+(n-2)+(n-1)\right) = n.a + r\frac{(n-1).n}{2}$$

Exercício 9.3: Calcule a somatória $\sum_{k=0}^{n-1} b^k$ para um número real b arbitrário diferente de 1 e 0. Observe que $b^k = (b^{k+1} - b^k)/(b - 1)$.

$b \neq 1$ $\quad$ $k+1 = k'$ $\quad$ $b \neq 0$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} b^k} = \sum_{k=0}^{n-1}(b^{k+1}-b^k)/(b-1) = \frac{1}{b-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} b^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} b^k\right) = \frac{1}{b-1}\left(b^n + \cancel{\sum_{k'=1}^{n-1} b^{k'}} - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} b^k} - b^0\right) = \boxed{\frac{b^n-1}{b-1}}$$

Exercício 9.4:[Soma de PG] Calcule a somatória $\sum_{k=0}^{n-1} ar^k$, cujas n parcelas são parte de uma progressão geométrica com termo inicial a e razão r arbitrários.

$$r \neq 0 \text{ e } r \neq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a.r^k = a\sum_{k=0}^{n-1} r^k \overset{!}{=} a\frac{(r^n-1)}{r-1}$$

$r = 0 \Rightarrow$ indeterminado por conta da 1ª parcela

$r = 1 \Rightarrow \sum = a.n$

Exercício 9.5: Calcule a somatória $\sum_{k=1}^{n} 1/k(k + 1)$. $= 1 - 1/(n+1) = \frac{(n+1)-1}{(n+1)} = n/(n+1)$

$$\frac{1}{k(k+1)} \overset{?}{=} \frac{x}{k} - \frac{y}{(k+1)} = \frac{x(k+1)-yk}{k(k+1)} = \frac{xk+x-yk}{k(k+1)} \Leftrightarrow (x-y)k+x = 1 \Leftrightarrow x=y=1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)} = \frac{1}{1} + \cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}} - \cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}} - \frac{1}{(n+1)} = \boxed{1 - 1/(n+1)}$$

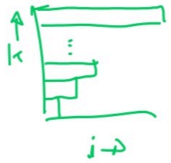
Exercício 9.6: Prove, por indução em n, que

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{\left(\sin \frac{n}{2}\alpha\right)\left(\sin \frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \tag{9.17}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e todo ângulo α que não é um múltiplo inteiro de 2π.

Exercício 9.7: Sejam $F_0, F_1, F_2, \dots$ os números de Fibonacci, definidos recursivamente por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural n. Prove, por indução em n, que

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$



Exercício 9.9: Para todo número inteiro positivo n, o n-ésimo número hamônico é

$$H_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n}. \tag{9.24}$$

Prove que, para todo inteiro n maior ou igual a 2,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k \;=\; (n+1)H_n - n. \tag{9.25}$$

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{i} = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = (n+1)H_n - n$$

9.4.2 Distributividade generalizada

---

note que os somatórios duplos particionam o intervalo $[2, 2^n]$

p/ cada k, a menor parcela do somatório interno é a última, que vale $1/2^{k+1}$

p/ cada k, o somatório interno tem 2^k parcelas

Exercício 9.10: Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$H_{2^n} \;\geq\; 1 + \frac{n}{2}. \tag{9.29}$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^{2^n} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

$$H_{2^n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq \overbrace{1}^{1} + \overbrace{\frac{1}{2}}^{1 \cdot 1/2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^{2 \cdot 1/4} + \overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}^{4 \cdot 1/8} + \cdots + \overbrace{\frac{2^{n-1}}{2^n}}^{2^{n-1} \cdot 1/2^n} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \#\text{ parts}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \lg 2^n = 1 + \frac{n}{2}$$

9.5.2 Majoração por indução matemática

No capítulo 5 discutimos a técnica de prova por indução matemática e vimos como usá-la para