

Alguns Exercícios do Capítulo 8 - Funções

Exercício 8.1: Seja f uma função e \mathcal{R} uma relação sobre $\text{Dom}(f)$ tal que para todo x e y $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \text{Dom}(f)$.

- Prove que \mathcal{R} é uma relação de equivalência.
- Encontre as classes de equivalência de \mathcal{R} .

- reflexiva: $\forall x \in \text{Dom}(f)$ temos $f(x) = f(x) \Rightarrow (x, x) \in \mathcal{R}$
 - simétrica: $\forall x, y \in \text{Dom}(f)$ temos $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$
 - transitiva: $\forall x, y, z \in \text{Dom}(f)$ temos:
 $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow f(x) = f(y)$
 $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$

$\Delta \forall x \in \text{Dom}(f)$ temos $[x]_{\mathcal{R}} = \{y : (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{y : f(x) = f(y)\}$
 ou seja, \mathcal{R} tem uma classe p/ cada valor na imagem de f



Exercício 8.2: Para cada uma das seguintes funções de \mathbb{R} para \mathbb{R} , determine se a inversa é uma função:

1. $f_1(x) = x^3$.

\rightarrow sim, $f_1^{-1}(y) = y^{1/3}$ e $f_1^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2. $f_2(x) = e^x$.

\rightarrow não, pois f_2 não é sobrejetora, assim $f_2^{-1}(y) = \ln y$
 tem apenas reais positivos no domínio

3. $f_3(x) = \sin x$.

4. $f_4(x) = x^5 + x$.

5. $f_5(x) = x^5 - x$.

Interessante

\rightarrow não, pois f_5 não é injetora, observe que $f_5(0) = f_5(1)$, o que gera dois pares e/ou mais distintos em f_5^{-1}

8.3 Imagem e imagem inversa de um conjunto

⊗

Exercício 8.3: Sejam f uma função, A, B subconjuntos de $\text{Dom}(f)$ e U, V subconjuntos de $\text{Im}(f)$. Prove ou encontre contra-exemplos para cada uma destas afirmações:

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. (ida) Tome $x \in B$. Como $B \subseteq A$ temos $x \in A$. Assim, $f(B) = \{f(x) : x \in B\} \subseteq \{f(x) : x \in A\} = f(A)$ ✓
- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$. (volta) Tome $y \in f(B)$. Como $f(B) \subseteq f(A)$ temos $y \in f(A)$. Porém, considere $x \in B \setminus A$, i.e., $B \not\subseteq A$. Se $f(x) = f(x')$ p/ $x' \in A$, então ainda é possível $f(B) \subseteq f(A)$ ✗. Como um contra-exemplo, considere $f(x) = |x|$, $A = \{1, 2\}$ e $B = \{-1\}$
- • $B \subseteq A \Leftrightarrow f(B) \subseteq f(A)$. Lembre que $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ e $f^{-1}(Y) = \{x : f(x) \in Y \cap \text{Im}(f)\}$
- $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Note que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, pois $\forall x \in A$ temos $f(x) \in f(A)$ e $x \in f^{-1}(f(A))$. Mas, se tivermos $x \in A$ e $x' \notin A$ c/ $f(x) = f(x')$ então $x' \in f^{-1}(f(A))$. ✗
- $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.
- $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$.
- $U \subseteq V \Leftrightarrow f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$. Tome $y \in U$. Como $U \subseteq \text{Im}(f)$ existe $x : y = f(x)$. Assim, $x \in f^{-1}(U)$.
- • $f^{-1}(f(A)) = A$.
- • $f(f^{-1}(U)) = U$.

Interessante avaliar alguns

⊗ É óbvio: se f for injetora, então a dupla implicação vale!

Portanto, $y \in f(f^{-1}(U))$, i.e., $U \subseteq f(f^{-1}(U))$. Para mostrar que $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$, por abundar vamos

Exercício 8.4: Seja f uma função de um conjunto A para um conjunto B . Considere a relação \mathcal{R} sobre A tal que

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

para quaisquer elementos a e b de A . Esta é uma relação de equivalência? Em caso afirmativo, descreva suas classes de equivalência.

super $\exists y \in f(f^{-1}(U))$ (a) e $y \notin U$. (b) a) garante que

$\exists x \in f^{-1}(U) : y = f(x)$. Logo, $(f(x), x) \in f^{-1}$ e, como f é uma função, $(f(x), x)$ é o único par em f^{-1} c/ destino em x . Portanto, para $x \in f^{-1}(U)$ é preciso que $y = f(x) \in U$, o que está errado b) ✓

8.5 Composição de funções

Uma vez que funções são relações, a composição de duas funções f e g é definida da mesma forma

⊗ Seja $\{(10, x), (20, y), (30, z)\} = (x, y, z)$ p/ ser mais compacto

8.7. FUNÇÃO PERMUTAÇÃO

171

→ $R: (10, 20, 30), (10, 30, 20), (20, 10, 30), (20, 30, 10), (30, 10, 20), (30, 20, 10)$ num total de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutações

Exercício 8.14: Liste todas as permutações do conjunto $A = \{10, 20, 30\}$.

→ $R: 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ permutações, construídas acrescentando 40 em cada uma de 4 posições nas permutações da solução anterior

Exercício 8.15: Liste todas as permutações do conjunto $A = \{10, 20, 30, 40\}$.

Por ser bijetora, toda permutação de um conjunto A tem uma inversa, que também é uma permutação