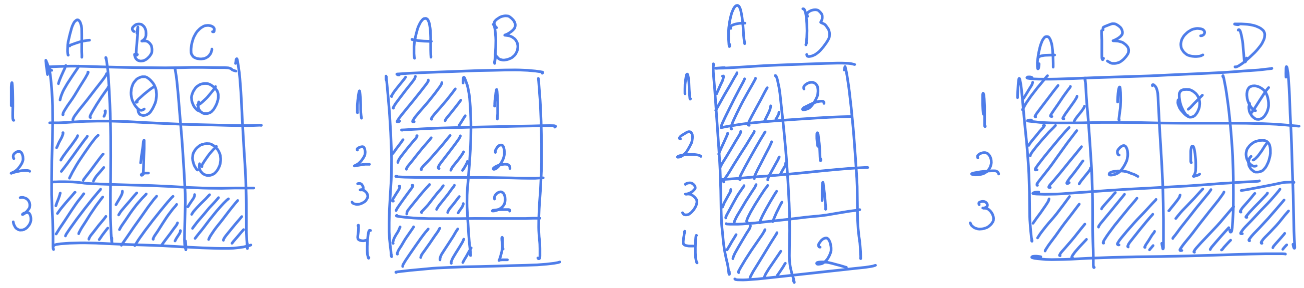
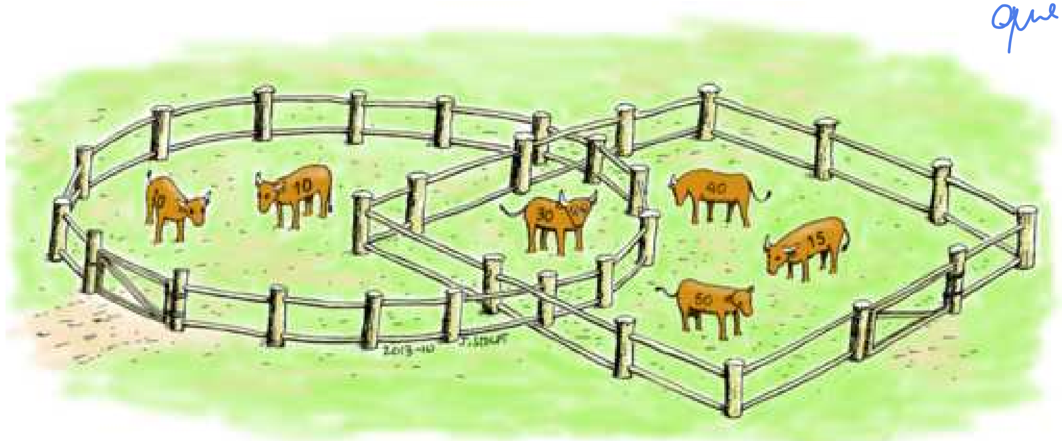


Capítulo 2

Teoria dos Conjuntos

incógnitas

Apresentar conceitos e definições como ? sempre que possível!!!



$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 3, 5\}$ $C = \{2\}$ $D = \{1, 3\}$

Acreditamos que o leitor já teve contato com os conceitos básicos da teoria dos conjuntos, como *elemento*, *união*, *intersecção*, etc.. Nesta seção vamos revisar esses conceitos.

Embora seja possível desenvolver a teoria de conjuntos de maneira axiomática, como foi feito por Georg Cantor (1845–1918) e Ernest Zermelo (1871–1953), a abordagem informal apresentada é suficiente para nossos propósitos.

Conjunto = coleção não ordenada de elementos

Um *conjunto* é um conceito primitivo, que informalmente pode ser entendido como uma coleção *não ordenada* de entidades *distintas*, chamadas de *elementos* do conjunto.

Dizemos que um elemento *x pertence* a um conjunto A se x é um elemento de A. Denotamos este fato por $x \in A$. Para denotar que *x não pertence* a A, ou seja, que x não é um elemento do conjunto A, escrevemos $x \notin A$.

$1 \in A$ $1 \notin C$ $5 \in B$ $5 \notin D$

Se x pertence a um conjunto A, diz-se também que A *tem* (ou *possui*) x, e escreve-se $A \ni x$. A negação desta afirmação (A *não tem* ou *não possui* x) é denotada por $A \not\ni x$. Não é correto dizer que A "contém" x, pois este termo é usado em matemática com um sentido bem diferente (veja a seção 2.4)

A notação $x, y, z \in A$ é muito usada como uma abreviação de "$x \in A$ e $y \in A$ e $z \in A$."

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 3, 5\}$ $C = \{2\}$ $D = \{1, 3\}$ $X = \{x : P(x)\}$

Note que $\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{2,1,3\}$

2.1 Especificando conjuntos

$S = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < x < 2\} = \{-2, -1, 0, 1\}$

Podemos especificar um conjunto de diversas formas. Se um conjunto tem poucos elementos, podemos listá-los, um a um, em qualquer ordem, entre chaves '{}'. Por exemplo, o conjunto cujos elementos são os números inteiros 2, 3 e 5 pode ser escrito $\{2, 3, 5\}$. Assim, por exemplo, temos que $3 \in \{2, 3, 5\}$, mas $4 \notin \{2, 3, 5\}$.

Outra maneira de especificar um conjunto é através das propriedades de seus elementos. Para tanto, usamos a notação $\{\, x : P(x) \,\}$, onde x é uma variável arbitrária e $P(x)$ uma afirmação matemática que depende do valor de x. Essa notação é lida "o conjunto de todos os x tais que $P(x)$". Por exemplo, outra maneira de definir o conjunto $\{-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$ é

$$\{\, x : x \text{ é um número inteiro e } -5 < x < 5 \,\} \tag{2.1}$$

(Alguns livros e autores usam o símbolo '|' em vez de ':' para significar "tais que".)

Existem alguns conjuntos de números que são muito usados em matemática, e tem notações convencionais bem estabelecidas:

- o conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z}$,
- o conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N} = \{\, x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \geq 0 \,\}$,
- o conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$, e
- o conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$.
- o conjunto dos *números complexos* $\mathbb{C} = \{\, x + y\mathbf{i} : x, y \in \mathbb{R} \,\}$, onde $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$.

$1 \in A$

$2 \notin B$

$D \ni 3$

$\{x \in \mathbb{Z} : x > 0$ E $x \leq 5$ E $x \% 2 = 1\} = ?$

R: $\{1, 3, 5\}$ → resto da divisão por 2 é 1

Alguns livros e autores, especialmente os mais antigos, definem os números naturais $\mathbb{N}$ com '>' em vez de '≥'; ou seja, consideram que zero não é um número natural. Essa escolha possivelmente se deve ao fato de que, em muitas línguas, a quantia zero é expressa de maneira bem diferente da usada para números positivos: em vez de "tenho zero bois", diz-se "não tenho bois". Em latim nem sequer existia uma palavra para esse número, que não pode ser escrito em algarismos romanos. (A palavra tem origem árabe, e foi introduzida na Europa apenas na Idade Média, junto com os algarismos "arábicos" inventados na Índia séculos antes.) Na alfabetização de crianças, o número zero era geralmente ensinado bem depois de 1, 2, 3, etc., como um conceito "avançado".

Matematicamente, porém, não há nada errado com "zero bois" — e crianças podem aprender o número 0 até mais facilmente que o número 2. Hoje em dia, a versão com zero parece ser mais popular: é a recomendada pela ISO (padrão 80000-2) e, no geral, a mais útil em computação. Muitos matemáticos até definem $\mathbb{N}$ como "o conjunto de todas as cardinalidades de conjuntos finitos", que inclui 0 como $|\emptyset|$. → $|\emptyset|$

Interessante

Exercício 2.1: Escreva explicitamente os elementos dos seguintes conjuntos:

1. $A = \left\{ x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 - 2x + 1 \leq 0 \right\}$. → $A = \{1\}$
2. $A = \{\, x : x \in \mathbb{Z},\ 2 \leq x \leq 20 \text{ e } x \text{ é primo} \,\}$. → $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
3. $A = \left\{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 - 2x = 0 \right\}$. → $A = \{0, 2\}$

Resolvido na aula 3

$X = A \setminus B = \{5\}$ $Y = \{x : x \notin x\}$ $Z \notin Y$

 $Y \in Y?$

$Z = \{1, 2, Z\}$ $A \in Y$

2.1.1 Definições circulares e contraditórias

$X = Y \setminus Z$

A definição de um conjunto pode usar outros conjuntos, como por exemplo "seja X o conjunto de todos os elementos que estão no conjunto Y mas não no conjunto Z". Porém, deve-se tomar cuidado para evitar definições circulares, que podem não ter sentido. Um exemplo clássico é a definição "seja X o conjunto de todos os elementos que não pertencem a X". Esta "definição" não faz sentido pois diz que um elemento que está em X não está em X, e vice-versa.

achava que o paradoxo de Russel era: "seja X o conj. de todos os conj. que ñ contém a si próprio"

Este contra-exemplo teve um papel muito importante no desenvolvimento da teoria de conjuntos. Ele é conhecido pelo nome *Paradoxo de Russel*, por ter sido observado pelo matemático inglês Bertrand Russel (1872–1970). Ele é conhecido também como *Paradoxo do Barbeiro*, pois foi exemplificado com uma anedota em que o barbeiro de um quartel recebeu a ordem de fazer a barba de todos os que não fizessem sua própria barba, e apenas esses — deixando o barbeiro na dúvida sobre o que ele deveria fazer com a sua.

Por outro lado, há definições circulares de conjuntos que são perfeitamente válidas. Por exemplo, considere o conjunto de inteiros X que possui o inteiro 1, não possui o inteiro 0, possui $x + 2$ e $x - 2$ qualquer que seja o elemento x de X. Pode-se verificar que o único conjunto X com estas propriedades é o conjunto dos inteiros ímpares. Para entender porque esta definição é válida vamos precisar do conceito de indução matemática, que será visto no capítulo 5.

$\to X = \{1, x+2, x-2 : x \in X\}$

2.2 Igualdade de conjuntos

$x \notin A \Rightarrow x \notin B$

$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A)$

Por definição, um conjunto A *é igual a* um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B, e todo elemento de B é elemento de A. Esta condição, denotada por $A = B$, significa que A, B são o mesmo conjunto.

$\Leftrightarrow \exists x ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A))$

Dito de outra forma, dois conjuntos A e B são diferentes ($A \neq B$) se, e somente se, existe um elemento de A que não pertence a B, ou um elemento de B que não pertence a A.

Observe que, como os conjuntos não são ordenados, o conjunto $\{1, 2, 3\}$ é igual ao conjunto $\{3, 2, 1\}$.

2.3 Conjunto vazio

$\forall x (x \notin E)$ $E?$

$A = \{\} = \emptyset$

É possivel definir conjuntos sem elementos. Dizemos que tal conjunto é *vazio*. Por exemplo, considere o conjunto $A = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x = x + 1 \}$. Todos os conjuntos vazios são iguais; ou seja existe um único conjunto vazio, que é geralmente denotado por $\emptyset$.

$A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ E } x = x + 1\}$ $A?$

2.4 Relação de inclusão

$A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$ $\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A é um *subconjunto* de B se, e somente se, todo elemento de A é um elemento de B. Neste caso, dizemos também que *A está contido em B*, ou que *B contém A*. Denotamos esta condição por $A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$.

$C ? A$ $A \not? B$ $D ? B$ $D ? D$ | $D ? B$ $D \not? D$

$\subseteq$ $\subset$

$A \not\subseteq B \Rightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$

Se existe um elemento de A que não pertence a B, então A não é subconjunto de B, e escrevemos $A \not\subseteq B$. De acordo com esta definição, todo conjunto está contido em si próprio e contém o conjunto vazio; ou seja, $A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$, para qualquer conjunto A.

$\forall A (A \subseteq A$ e $A \supseteq \emptyset)$

Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$, dizemos que A é um sub-conjunto *próprio* de B, que denotamos por $A \subset B$ ou $B \supset A$. Analogamente, $A \not\subset B$ significa que A não é um subconjunto próprio de B.

2.5 Cardinalidade

¿A?= 3 ¿B?= 3 ¿C?= 1 ¿D?= 2

$|x|$

Informalmente, dizemos que um conjunto A é *finito* se ele tem um número finito $n \in \mathbb{N}$ de elementos. Este número é a *cardinalidade* de A, denotada por $|A|$ ou $\#A$. Observe que $|A| = 0$ se e somente se $A = \emptyset$.

$|A|$

Dizemos que um conjunto é *infinito* se ele não é finito. Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ são infinitos.

Conjuntos infinitos não podem ter seus elementos listados explicitamente. Informalmente, é comum usar '...' nesses casos, por exemplo

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = +\infty$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$?

Entretanto, esta notação deve ser evitada pois pode ser ambígua. Por exemplo, o que é o conjunto $\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$?

▷ Apontar a semelhança entre os operadores $\wedge$ (E), $\vee$ (OU), $\sim$ (Neg), $\oplus$ (XOR) c/ as operações c/ conjuntos

2.6 Operações com conjuntos

→ Ir desenhando Diagramas de Venn conforme apresento as operações (ou mostrar no final e pedir p/ identificarem cada operação)

Para os próximos conceitos sejam A e B dois conjuntos.

2.6.1 União e interseção

$A \cup B = \{x : x \in A \overset{\text{ou}}{\vee} x \in B\}$

A *união* de A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos, A ou B.

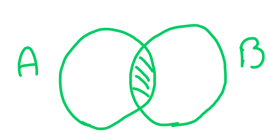
Exemplo 2.1: Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

A ? B = {1,2,3,5}

C ? D = A | A ? D = A

$A \cap B = \{x : x \in A \overset{\text{E}}{\wedge} x \in B\}$

A *intersecção* de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em ambos os conjuntos, A e B.



Exemplo 2.2: Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ então $A \cap B = \{2, 3\}$.

$A \cap B = \emptyset$

Se $A \cap B = \emptyset$ dizemos que os conjuntos A e B são *disjuntos*, ou *não tem interesecção*, ou *não se intersectam*.

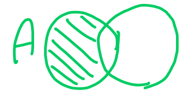
A ? B = D | B ? B = B

C ? D = ∅

Diz-se também que três ou mais conjuntos são *disjuntos dois a dois* se todos os pares desses conjutos são disjuntos. Por exmplo, os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{6, 7\}$ são disjuntos dois a dois, pois $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$. Por outro lado, os conjuntos $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3\}$, e $Z = \{4, 5\}$ *não* são disjuntos dois a dois, pois $X \cap Y = \{2\} \neq \emptyset$; embora a intersecção $X \cap Y \cap Z$ dos três seja o conjunto vazio.

$A \,?\, D = C$
$A \,?\, C = D$

2.6.2 Diferença, universo, e complemento

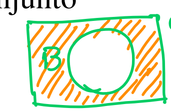


$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

A *diferença de A e B* é o conjunto de todos os elementos de A que não estão em B. Este conjunto é também chamado *A menos B*, ou o *complemento de B em A*, e é denotado por $A - B$ ou $A \setminus B$.

$A \,?\, A = \emptyset$
$A \,?\, B = C$

Em certos casos, é conveniente supor que todos os elementos de todos os conjuntos que nos interessam pertencem a um *conjunto universal* ou *universo*, que denotaremos por $\mathcal{U}$. Se A é o conjunto universo $\mathcal{U}$, então $\mathcal{U} \setminus B$ é chamado o *complemento* de B e denotado por $\overline{B}$ ou B^c.



Interessante

Observe que se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$, $A \cap B = A$ e $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Comentado na aula 1

Exercício 2.2: Dê exemplos em que $(A \cup B) \setminus B = A$ e $(A \cup B) \setminus B \neq A$

↳ $A \cap B = \emptyset$ || ↳ $A \cap B \neq \emptyset$

⊛ Perguntar pela regra geral

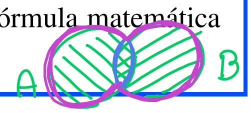
Exercício 2.3: Sejam $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} : (x - 1)(x - 3)^3 = 0\right\}$ e $C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}$. Calcule:

$B = \{1, 3\}$

1. $A \cup B$. $= \{1, 2, 3, 4\}$
2. $A \cap (B \cup C)$. $= \{1,2,3,4\} \cap \{1,3\} = \{1,3\}$
3. $C \setminus A$. $=$ (ímpares de $\mathcal{U}$) $\setminus A = \{1,3,5,7,9\} \setminus \{1,2,3,4\} = \{5,7,9\}$
4. A cardinalidade de A, de B e de C. $|A| = 4$, $|B| = 2$, $|C| = 5$ por conta de $\mathcal{U}$
5. $\overline{A} \cup C$. $= \{5,6,7,8,9\} \cup \{1,3,5,7,9\} = \{1,3,5,6,7,8,9\}$

⊛ Aula de exercícios

Exercício 2.4: Sejam A e B dois conjuntos finitos quaisquer. Encontre uma fórmula matemática que relaciona $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|$ e $|A \cup B|$. $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$



Deduzido na aula 1

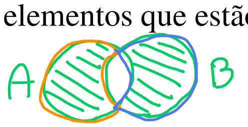
⊠ Apresentar relações de cardinalidade entre união, interseção e diferença!!!

2.6.3 Diferença simétrica

↳ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \underbrace{|A \setminus B| + |A \cap B|}_{A} + |B \setminus A|$ (com $\overbrace{|A \cap B| + |B \setminus A|}^{B}$)

$A \,?\, D = C$
$A \,?\, C = D$

Outra operação entre conjuntos é a *diferença simétrica*, denotada por $A \oplus B$ ou $A \triangle B$, que consiste de todos os elementos que estão em *exatamente* em um dos dois conjuntos. Isto é,



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \tag{2.2}$$

$A \,?\, A = \emptyset$
$A \,?\, B = \{2, 5\}$

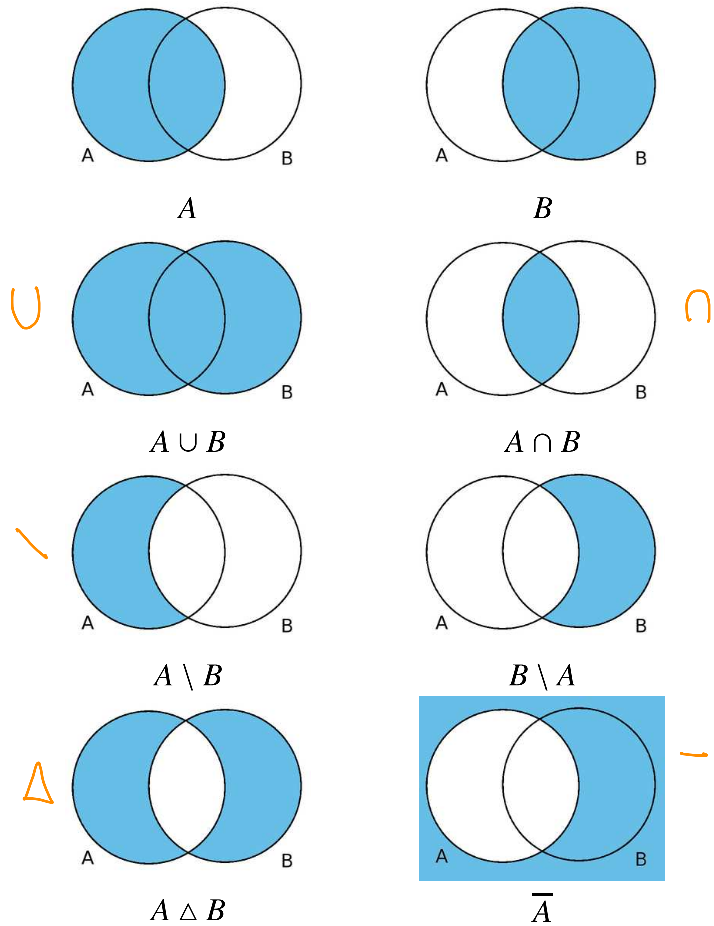
⊠ Resolver esses ao final da 1ª aula!!!

Exercício 2.5: Se $A \triangle B = A$ o que se pode dizer dos conjuntos A e B? B é vazio

Extra
- Se $A \triangle B = \emptyset$ então? $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$
- Se $A \triangle B \subset A$ então? $\emptyset \neq B \subseteq A$
- Se $A \triangle B = A \cup B$ então? $A \cap B = \emptyset$

2.6.4 Diagrama de Venn

A figura 2.1 mostra uma representação gráfica das operações de conjuntos:



☒ Fazer esse puzzle no início da aula 2 !!!

→ 9 ©

∅	?	∅
∅	27	7
∅	24	?
∅	21	?
∅	10	?

→ 11 ⓑ

10 ⓐ

→ 6

→ 4

Figura 2.1: Operações com conjuntos.

1ª aula de conjuntos veio até aqui

Esta representação gráfica para conjuntos é chamada de *diagrama de Venn*, por ter sido introduzida pelo matemático inglês John Venn (1834–1923).

2.6.5 Propriedades das operações com conjuntos → ☒ Ir deduzindo com os alunos

∪, ∩, \, —, Δ Quais operações apresentam cada propriedade?

A seguir listaremos algumas propriedades que são satisfeitas pelas operações com conjuntos.

- *Comutatividade*:

$A ? B = B ? A$

$$A \cup B = B \cup A.$$ → $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ ou é comutativo

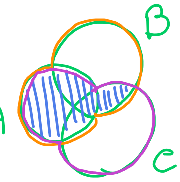
$$A \cap B = B \cap A.$$ → $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ E é comutativo

- *Associatividade*:

$A ? (B ? C) =$
$(A ? B) ? C$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

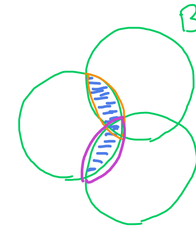
$A \cup (B \cap C) =$



- *Distributividade*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$A \cap (B \cup C) =$



- *Idempotência*:

$A ? A = A$

$$A \cup A = A.$$
$$A \cap A = A.$$

Δ na lógica $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

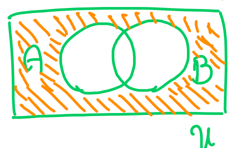
$\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$

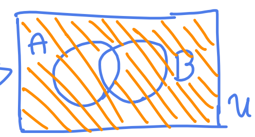
$\overline{A \cup B} =$

$\overline{A \cap B} =$

- *Leis de De Morgan*:

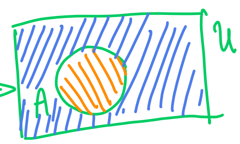
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$





Estas leis levam o nome do matemático inglês Augustus de Morgan (1806–1871), mas eram conhecidas desde a Antiguidade.

- *Propriedades do complemento*:



$$\overline{\overline{A}} = A.$$
$$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}.$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset.$$
$$\overline{\mathcal{U}} = \emptyset.$$
$$\overline{\emptyset} = \mathcal{U}.$$

$\overline{\overline{A}} =$

$A \cup \overline{A} =$

$A \cap \overline{A} =$

$\overline{\mathcal{U}} =$

$\overline{\emptyset} =$

- *Propriedades do conjunto universal*:

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$
$$A \cap \mathcal{U} = A.$$

$A \cup \mathcal{U} =$

$A \cap \mathcal{U} =$

- *Propriedades do conjunto vazio*:

$$A \cup \emptyset = A.$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$A \cup \emptyset =$

$A \cap \emptyset =$

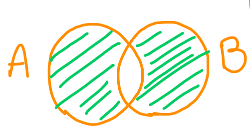
Resolvido na aula 2

Exercício 2.6: Usando diagramas de Venn, verifique que a diferença simétrica também é uma operação associativa e comutativa; isto é, que $\underbrace{A \triangle B = B \triangle A}_{\text{comutativa}}$ e $\underbrace{(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)}_{\text{associativa}}$, para quaiquer conjuntos A, B e C.

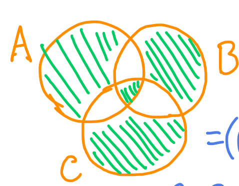
$A \Delta B = \{x : x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\}$

$= \{x : x \in B \setminus A \vee x \in A \setminus B\}$

$= B \Delta A$



$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$



$(A \Delta B) \Delta C = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Delta C$

$= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C) \cup (C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$= (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup$

$A \cap B \cap C = \ldots$

Dica: analisar por tipo de elemento

Desenhar o diagrama e pedir a fórmula

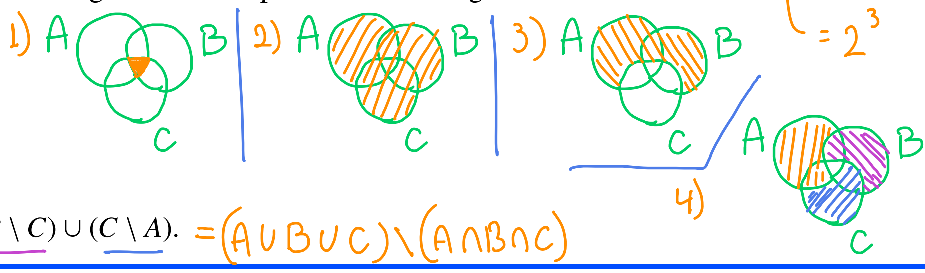
Resolvido na aula 2

Feito

Exercício 2.7: Diagramas de Venn podem ser usados para três ou mais conjuntos. Um diagrama de Venn para três conjuntos A, B e C, por exemplo, precisa dividir o plano em 8 regiões, correspondendo a todas as possíveis relações (pertence ou não pertence) entre um elemento e esses três conjuntos. Desenhe tal diagrama e use-o para mostrar as seguintes fórmulas:

$= 2^3$

1. $A \cap B \cap C$.
2. $A \cup B \cup C$.
3. $(A \cup B) \setminus C$.
4. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$. $= (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

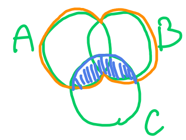


Resolvido na aula 3

Completar

Exercício 2.8: Use diagramas de Venn para verificar as seguintes identidades:

1. $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
4. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.



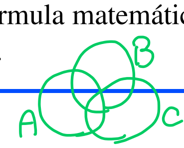
Apresentar os dois lados fora de ordem, conectar e conferir usando diagramas de Venn!!

Deduzido na aula 2

Feito

Exercício 2.9: Sejam A, B e C três conjuntos finitos quaisquer. Encontre uma fórmula matemática para $|A \cup B \cup C|$ em função de $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$ e $|A \cap B \cap C|$.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



2.7 Conjuntos de conjuntos

$B \,?\, A$ $\quad B \not\subset A$

$2 \,?\, B$ $\quad \{2\} \subset B$

Conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos. Por exemplo, o conjunto

$$\boxed{A = \{\emptyset, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 4, 7\}\}}$$

$B = \{2, 3\}$ $\quad 2 \notin A$ $\quad \{2\} \not\subset A$

é um conjunto com quatro elementos. Se B é o conjunto $\{2, 3\}$, temos que B é elemento de A ($B \in A$), mas B não é sub-conjunto de A ($B \not\subseteq A$). Note que $\emptyset$ é elemento de A e também subconjunto de A, enquanto que $\{2\}$ não é nem uma coisa nem outra.

Em particular, o conjunto $A = \{\emptyset\}$ *não* é vazio, pois ele tem um elemento — o conjunto vazio. Observe que $|A| = 1$, enquanto que $|\emptyset| = 0$.

2.8 Conjunto potência

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto A é chamado de *conjunto potência* de A, e denotado por $\mathbb{P}(A)$.

$\mathbb{P}(A) = 2^A$ e $|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|}$

↳ deduzir

⊗ apresentar $\mathbb{P}(A)$ seguindo a regra de formação do alg. p/ gerar todos os subconjuntos!!!

Exemplo 2.3: Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

→ escrever p/ deduzirem

Observe que se $A = \emptyset$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset\}$, e se $A = \{\emptyset\}$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Se A é um conjunto finito, então $|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|}$. Este fato será demonstrado no capítulo 5. Por esta razão, muitos autores denotam o conjunto potência de A por 2^A.

↳ deduzir a partir do "alg." anterior!!

Resolvido na aula 2

Exercício 2.10: Se A é um conjunto qualquer, e B é a união de todos os elementos de $\mathbb{P}(A)$, o que podemos dizer sobre A e B? $A = B$

$B = \bigcup_{S \in \mathbb{P}(A)} S = A$, pois $S \subseteq A\ \forall S \in \mathbb{P}(A)$

Aula de exercícios

Ex. Se $|\mathbb{P}(A)| = K$ e $b \notin A$, quanto vale $|\mathbb{P}(A \cup \{b\})|$?

Exercício 2.11: Se A e B são dois conjuntos com o mesmo conjunto potência, podemos concluir que $A = B$?

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \Rightarrow ?$

2.9 Partição

$\left[\bigcup_{S \in P} S = A \text{ e } X \cap Y = \emptyset\ \forall X, Y \in P\right] \approx$ cada elemento de A está em exatamente um conjunto de P

Seja A um conjunto, e P um conjunto cujos elementos são sub-conjuntos de A (isto é, $P \subseteq \mathbb{P}(A)$). Dizemos que P é uma *partição* de A se os elementos de P são não vazios, disjuntos dois a dois, e a união de todos os elementos de P é A. Nesse caso, cada elemento de P é também chamado de uma *parte* ou *bloco* da partição.

Partição

Partição Trivial

Bi-partição

Exemplo 2.4: Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, o conjunto

$$P = \{\{1, 2, 5, 6, 7\}, \{3\}, \{4, 8, 10\}, \{9\}\}$$

é uma partição de A.

Observe que, para qualquer conjunto não-vazio A, o conjunto $\{A\}$ é sempre uma partição de A; às vezes chamada de *partição trivial*. Além disso, se B é qualquer subconjunto próprio e não vazio de A ($\emptyset \subset B \subset A$), então o conjunto $\{B, A \setminus B\}$ também é uma (bi)partição de A.

O conjunto vazio tem apenas uma partição, que é o próprio conjunto vazio (sem nenhuma parte).

resolvido majoritariamente na aula 2

Exercício 2.12: Quais dos conjuntos abaixo são partições do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros?

a) $\{P, I\}$ onde P é o conjunto dos pares e I é o conjunto dos ímpares. Sim

b) $\{\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-\}$ onde $\mathbb{Z}^+$ é o conjunto dos inteiros positivos, e $\mathbb{Z}^-$ é o conjunto dos inteiros negativos. Não $\emptyset$?

c) $\{R_0, R_1, R_2\}$ onde, para $i = \{0, 1, 2\}$, R_i é o conjunto dos inteiros n tais que $|n|$ tem resto i na divisão por 3. Sim

d) $\{A, B, C\}$ onde A é o conjunto dos inteiros menores que -100, B é o conjunto dos inteiros com valor absoluto menor ou igual a 100, e C é o conjunto dos inteiros maiores que 100. Sim

e) $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, onde P_k é o conjunto de todos os inteiros cujo quadrado termina com o algarismo k. (Por exemplo, $P_6 = \{4, -4, 6, -6, 14, \ldots\}$.) Não, todo inteiro tem um quadrado, que termina em apenas um algarismo, mas alguns P_k são vazios. P_2 é vazio? P_3 também? P_7 também? P_8 também?

f) $\{\{0\}\} \cup \{P_k : k \in \mathbb{N}\}$, onde P_k é o conjunto de todos os inteiros x cujo valor absoluto $|x|$ está entre 2^k (inclusive) e 2^{k+1} (exclusive). Sim

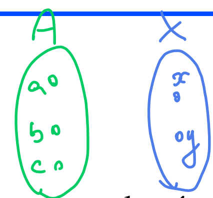
2ª aula parou aqui

Exercício 2.13: Quais dos conjuntos abaixo são partições do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais?

a) $\{\mathbb{R}^+, \{0\}, \mathbb{R}^-\}$, onde $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos números reais positivos e $\mathbb{R}^-$ é o conjunto dos números reais negativos. Sim

b) $\{\mathbb{I}, \mathbb{Q}\}$ onde $\mathbb{I}$ é o conjunto dos números irracionais e $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. Sim

c) $\{\{x + n : n \in \mathbb{Z}\} : x \in [0, 1)\}$. Sim



$A \times X = \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (c,x), (c,y)\}$

2.10 Produto cartesiano

Indicamos por (a, b) um *par ordenado* de elementos, no qual a é o *primeiro elemento* e b é o *segundo elemento*. Um par ordenado não deve ser confundido com um conjunto de dois elementos, pois a ordem é importante (por exemplo, o par $(10, 20)$ é diferente do par $(20, 10)$) e os dois elementos podem ser iguais (como por exemplo no par $(10, 10)$). Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais (são o mesmo par) se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

2.10.1 Produto cartesiano de dois conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos. O *produto cartesiano*, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$. Como os pares são ordenados, temos que $A \times B \neq B \times A$ (exceto quando $A = B$ ou $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$).

Exercício 2.14: Quanto elementos tem o conjunto $A \times B$ se o conjunto A tem p elementos, e o conjunto B tem q elementos? $|A \times B| = p \cdot q$

Deduzir na aula 3

2.10.2 Produto cartesiano de vários conjuntos

Definimos uma *ênupla ordenada*, ou simplesmente *ênupla*, como sendo uma sequência finita de m elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. (Sequências finitas são definidas formalmente na seção 8.13.) Observe que, como em um par ordenado, a ordem dos elementos é importante, e pode haver repetições. Assim, por exemplo, as $(10, 20, 20)$, $(10, 10, 20)$ e $(20, 10, 20)$ são três ênuplas diferentes.

Uma ênupla com dois elementos pode ser considerada um par ordenado, e é geralmente chamada por esse nome. Para $m \geq 3$ usam-se os nomes *tripla*, *quádrupla*, *quíntupla*, *sêxtupla*, *séptupla*, *óctupla*, etc.. Não há um nome especial consagrado quando $m = 1$. Na escrita usam-se também as notações 2-upla, 3-upla, etc., e m-upla quando m é genérico.

Em particular, uma 1-upla é uma sequência (a_1) com apenas um elemento, às vezes chamada de *sequência trivial*. Note que a 1-upla (10) não é a mesma coisa que o inteiro 10. Há uma única 0-upla, a *ênupla vazia* ou *sequência vazia*, denotada por $()$.

O *produto cartesiano* de m conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$, é o conjunto das m-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, com $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = \prod_{i=1}^{m} |A_i|$

2.10.3 Produto cartesiano de conjunto consigo mesmo

Se todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são o mesmo conjunto A, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ é denotado por A^m. Por exemplo, se $A = \{10, 20, 30\}$, temos

$$
\begin{aligned}
A^3 &= \{(10, 10, 10), (10, 10, 20), (10, 10, 30), (10, 20, 10), \ldots, (30, 30, 30)\} \\
A^2 &= \{(10, 10), (10, 20), (10, 30), (20, 10), \ldots, (30, 30)\} \\
A^1 &= \{(10), (20), (30)\} \\
A^0 &= \{()\}
\end{aligned}
$$

escrever e deduzir

Note que, se A não é vazio, A^1 é diferente de A (embora tenha o mesmo número de elementos).

Exercício 2.15: Quanto elementos tem o conjunto A^3 se o conjunto A tem n elementos? Se $|A^3| \leq |A|$, o que podemos dizer sobre A? $m \leq 1$ $|A^3| = m^3$

Resolver na aula 3

Exercício 2.16: Seja $A = \{20, 30\}$. Descreva os conjuntos (a) $(A^1)^1$, (b) $(A^2)^1$, e (c) $(A^2)^1$. $(A^1)^2$?

Note também que A^0, para qualquer A, é o conjunto $\{()\}$ cujo único elemento é a ênupla vazia, e portanto diferente de $()$, $\emptyset$, e $\{\emptyset\}$. Em particular, $\emptyset^0 = \{()\}$

O nome "cartesiano" é referência ao matemático francês-holandês René Descartes (1596–1650), chamado Renatus Cartesius em latim, que unificou a álgebra e a geometria ao usar pares de números reais para representar os pontos de Euclides, e equações algébricas para definir curvas como retas e círculos. Nesta abordagem, o plano euclidiano é representado pelo conjunto

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dito o *plano cartesiano*; e o espaço tridimensional pelo conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o *espaço cartesiano*. Estas representações são fundamentais para o uso de computadoes em cálculos geométricos, especialmente nas áreas de computação gráfica e geometria computacional.

2.11 Intervalos

Em matemática, um *intervalo real* ou simplesmente *intervalo* geralmente significa o conjunto de todos os números reais $\mathbb{R}$ compreendidos entre dois valores específicos. Há quatro variações principais deste conceito:

escrever

- $(a, b) = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a < x < b \}$ (*intervalo aberto*);
- $[a, b] = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x \leq b \}$ (*intervalo fechado*);
- $(a, b] = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a < x \leq b \}$ (*intervalo fechado à direita*),
- $[a, b) = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x < b \}$ (*intervalo fechado à esquerda*),

⊛ Coloca notação, definições e desenhos fora de ordem e conectá-los !!!

onde a e b são números reais, os *extremos*, *limites* ou *pontas* do intervalo.

Intervalos com as formas acima, com a e b reais, são ditos *limitados*. O termo *finito* também é usado, embora esses conjuntos em geral tenham infinitos elementos. São usados também intervalos *semi-infinitos* que são limitados em apenas um lado. A notação usa os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ para indicar ausência de limite em cada lado. Estes valores *não* são elementos de $\mathbb{R}$, mas são considerados menor e maior, respectivamente, que todos os números reais:

- $(-\infty, a) = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x < a \}$,
- $(-\infty, a] = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq a \}$,
- $(a, +\infty) = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a < x \}$,
- $[a, +\infty) = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x \}$,

⊛ coloca notação, definição ou desenho e deduzir os outros dois !!!

A notação $(-\infty, +\infty)$ então seria a mesma coisa que $\mathbb{R}$. Observe que notações como $[-\infty, a]$ ou $[a, +\infty]$, que implicariam a pertinência do elemento $-\infty$ ou $-\infty$ ao conjunto, não são intervalos reais.

Exercício 2.17: Adotando as definições acima, explique o significado das notações $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ e $(a, b]$ (1) quando $a = b$, e (2) quando $a > b$.

Resolvido na aula 3

checar a definição

1) $a = b \Rightarrow [a,b] = \{a\}$, $(a,b) = \emptyset$, $[a,b) = ?$, $(a,b] = ?$
$\quad\hookrightarrow \emptyset \qquad \hookrightarrow \emptyset$

2) $a > b \Rightarrow [a,b] = \emptyset$, ...

Resolvido majoritariamente na aula 3

Exercício 2.18: Suponha que a, b e c são números reais tais que $a < b$ e $b < c$. Quando é que as fórmulas abaixo produzem um único intervalo?

1. $(a, b) \cup (b, c)$. ×
2. $[a, b] \cup [b, c]$. √ $[a, c]$
3. $[a, b) \cup [b, c]$. √ " "
4. $(a, b) \cup [b, c]$. √ $(a, c]$
5. $[a, b) \cup (b, c]$. ×

Exercício 2.19: Descreva os conjuntos abaixo da maneira mais simples e explícita que puder:

1. $[1, 3] \cap (2, 4)$. $= (2, 3]$
2. $(-\infty, 2) \cap [-1, 0]$. $= [-1, 0]$
3. $(-\infty, 2) \cap [-1, 3]$. $= [-1, 2)$
4. $[0, 10] \cup [1, 11]$. $= [0, 11]$
5. $(0, \infty) \cap (-\infty, 1)$. $= (0, 1)$
6. $[-3, 0] \cup (0, 3]$. $= [-3, 3]$
7. $[-3, 0] \cup (0, 3]$.
8. $[-3, 0) \cup (0, 3]$. $= [-3, 3] \setminus \{0\}$
9. $[-3, 0] \cap [0, 3]$. $= \{0\}$
10. $[-3, 0] \cap (0, 3]$. $= \emptyset$
11. $[-3, 0) \cap (0, 3]$. $= \emptyset$
12. $\overline{(0, 5]}$. $= (-\infty, 0] \cup (5, +\infty)$
13. $\overline{(-\infty, 5]}$. $= (5, +\infty)$

?

Resolvido majoritariamente na aula 3

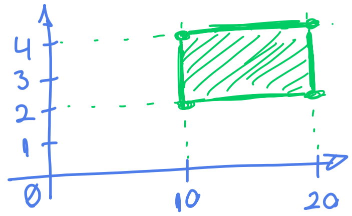
Exercício 2.20: Quais dos conjuntos de intervalos abaixo são partições do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais?

a) $\{\, [k, k+1] : k \in \mathbb{Z} \,\}$. Não, repetições

b) $\{\, (k, k+1) : k \in \mathbb{Z} \,\}$. Não, ausências

c) $\{\, (k, k+1] : k \in \mathbb{Z} \,\}$ Sim

d) $\{(-\infty, 0]\} \cup \{\, (k, k+1] : k \in \mathbb{N} \,\}$ Sim produto cartesiano de intervalos



$[10,20] \times [2,4] = \{(x,y) : 10 \leq x \leq 20 \text{ E } 2 \leq y \leq 4\}$

2.11.1 Caixas

O produto cartesiano $[10,20] \times [2,4]$ é um retângulo no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, com lados paralelos aos eixos das coordenadas. Os pontos $(10,2)$ e $(20,4)$ são cantos opostos do mesmo. O produto cartesiano $[10,20] \times [2,4] \times [60,70]$ é um paralelepípedo no espaço cartesiano $\mathbb{R}^3$, com todas as arestas paralelas aos eixos; os pontos $(10,2,60)$ e $(20,4,70)$ são dois cantos opostos do mesmo.

Inspirado nestes exemplos, o nome *caixa* é as vezes usado para um subcojunto de $\mathbb{R}^m$ que pode ser obtido pelo produto cartesiano de m intervalos $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$, especialmente quando os intervalos são finitos.

Exercício 2.21: Descreva precisamente os vários tipos de retângulo $B = I_1 \times I_2$ considerando os quatro tipos principais de intervalo para I_1 e I_2. Que cantos e que lados estão incluídos em B, em cada caso? Suponha que cada intervalo é limitado e não vazio, com extremos distintos.

Exercício 2.22: Seja B a caixa tridimensonal $[10,20] \times [2,4] \times [60,70]$ no $\mathbb{R}^3$. Mostre que cada face, aresta, e canto da caixa é também uma caixa do $\mathbb{R}^3$.