

# Capítulo 1

## Introdução à lógica matemática

### 1.1 Como ter certeza?

Você escreveu um programa, ou inventou um algoritmo, para resolver um certo problema. Como pode você se convencer que ele funciona? Como pode você convencer os outros que ele funciona?

Uma maneira de adquirir confiança sobre um algoritmo é testá-lo. Porém, para a maioria dos algoritmos, é impossível montar testes que verifiquem absolutamente todos os casos possíveis que podem ocorrer durante sua execução. Muitos programadores podem citar exemplos de programas que funcionaram perfeitamente em todos os testes, mas falharam imediatamente quando usados na prática.

### 1.2 A invenção da lógica

Essa questão — como ter certeza que nosso raciocínio é correto, e como transmitir aos outros essa certeza — foi estudada pelos gregos séculos antes de Cristo. Eles observaram que uma maneira de conseguir esse tipo de certeza, e para passar essa certeza a outras pessoas, é começar por um conjunto de axiomas, fatos simples que todos concordam que são verdade; e desenvolver um raciocínio a partir desses axiomas, usando regras de inferência, maneiras de raciocinar que todos concordam que são válidas. Com isso eles inventaram a *lógica*, que eles consideravam um ramo da *retórica*, a arte de discursar e convencer pessoas.

O filósofo grego Aristóteles (384–322 A.C.), em particular, estudou os chamados silogismos, raciocínios em que, partindo de duas premissas cuja verdade é aceita, obtem-se uma conclusão nova que é necessariamente verdadeira. Por exemplo, se acreditamos nas premissas “todos os homens são mortais” e “Sócrates é um homem”, então temos que acreditar também que “Sócrates é mortal.”. Ou então, se acreditamos que “nenhum mamífero tem penas”, e que “morcegos são mamíferos”, então temos que acreditar que “morcegos não tem penas”.

### 1.3 Euclides e demonstrações geométricas :)

Enquanto isso, os arquitetos e engenheiros gregos tinham preocupações semelhantes em relação aos “algoritmos geométricos” — construções com régua e compasso — que eles usavam em seus projetos. Por exemplo, a receita da figura 1.1 supostamente constrói um pentágono com todos os lados e ângulos iguais.

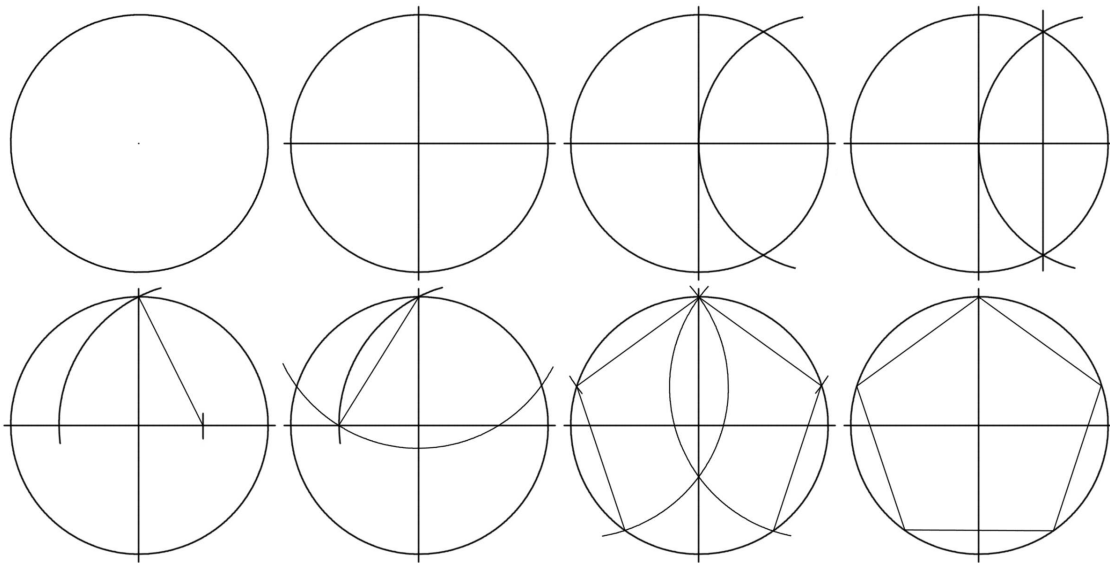


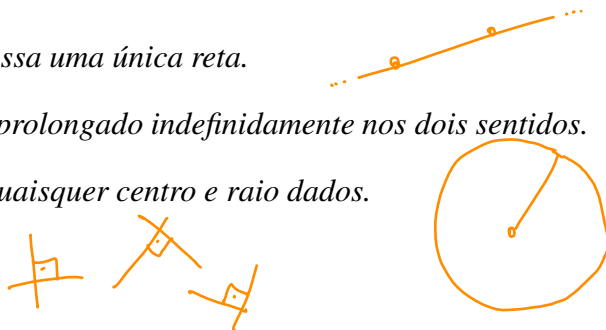
Figura 1.1: Construção de um pentágono regular.

→ *região ficou pesada =*

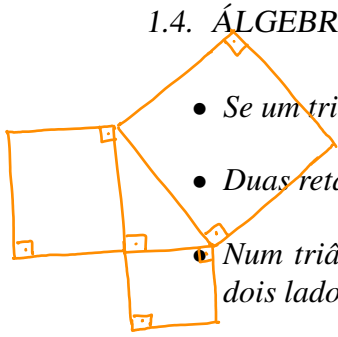
Como podemos ter certeza de que essa construção realmente faz isso? Podemos efetuá-la numa folha de papel e medir os ângulos; mas tanto os passos da construção quanto a medida final tem sempre pequenos erros, e portanto esse teste não vai dizer se a construção é matematicamente correta ou apenas aproximada. Se as diferenças entre os ângulos são desprezíveis no papel, será que serão desprezíveis quando esse algoritmo for usado na construção de um anfiteatro?

O primeiro a descrever um sistema lógico completo para a geometria da época foi o geômetra grego Euclides (que viveu por volta do século III antes de Cristo), no seu livro *Elementos de Geometria* [9]. Euclides começou enumerando dez axiomas sobre conceitos geométricos (pontos, retas, círculos, distâncias, ângulos), como por exemplo

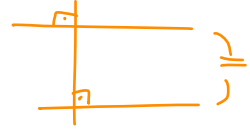
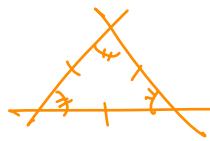
- *Por dois pontos distintos do plano passa uma única reta.*
- *Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente nos dois sentidos.*
- *É possível contruir um círculo com quaisquer centro e raio dados.*
- *Todos os ângulos retos são iguais.*



Em seguida Euclides mostrou centenas de outras afirmações (teoremas) que decorrem desses axiomas, como por exemplo



- Se um triângulo tem os três lados iguais, ele tem os três ângulos iguais.
- Duas retas que são perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.
- Num triângulo retângulo, o quadrado do maior lado é a soma dos quadrados dos outros dois lados.



Muitos desses teoremas são afirmações de que certas construções geométricas, como a da figura 1.1, produzem o resultado desejado. Principalmente, para cada teorema, ele também escreveu uma prova ou demonstração — uma sequência de passos lógicos que, começando com os axiomas e teoremas já provados, convence qualquer leitor de que o novo teorema é verdadeiro.

## 1.4 Álgebra

A lógica de Euclides e outros filósofos gregos foi extensamente usada por mais de dois mil anos. Entretanto, por muitos séculos o hábito de provar as afirmações foi limitado apenas à geometria. Embora os gregos conhecessem muitas propriedades de números (por exemplo, os conceitos de divisor comum e número primo), para demonstrar tais propriedades eles geralmente convertiam os números em comprimentos de retas, e usavam a linguagem da geometria. Esse é o caso, por exemplo, do algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum de dois números — que é considerado por muitos o mais antigo algoritmo não trivial. Na descrição original de Euclides, o problema é dividir dois segmentos de reta dados em partes iguais e de maior tamanho possível.

Na idade média, entretanto, o matemático árabe Al-Khwarizmi inventou a álgebra, outra maneira de provar afirmações sobre números e convencer pessoas de que uma dada sequência de operações aritméticas alcança o resultado desejado. Na álgebra, os números são representados abstratamente por letras, e as operações ou afirmações sobre esses números são indicadas com símbolos como ‘+’ ou ‘>’. A álgebra também fornece algumas fórmulas, como  $A + B = B + A$  e  $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ , que representam afirmações que são sempre verdadeiras, quaisquer que sejam os números que vierem a substituir as variáveis. A álgebra também fornece certas regras fundamentais que permitem transformar uma fórmula em outra fórmula equivalente, ou combinar fórmulas corretas para produzir novas fórmulas corretas. Por exemplo, se sabemos que  $A > B$  e  $B > C$  podemos concluir com certeza que  $A > C$ .

A geometria e a álgebra foram enfim unidas pelo matemático René Descartes (1596–1650), que mostrou como usar pares de números reais para representar pontos do plano. Entre outras consequências, essa idéia revolucionária criou toda a área da geometria analítica e forneceu uma interpretação geométrica para álgebra linear.

↳ plano cartesiano

## 1.5 As linguagens da lógica matemática

Em seguida à revolução de Descartes, outros matemáticos, principalmente no século 19, mostraram como aplicar a idéia geral da álgebra também à lógica. Esse trabalho produziu dois principais

sistemas de notação, ou *linguagens formais*, para expressar raciocínios lógicos de maneira matematicamente clara, sucinta, e, principalmente, livre de ambiguidades. Estas linguagens são a *teoria de conjuntos* e o *cálculo de predicados*.

As duas linguagens são essencialmente equivalentes, mas continuam sendo usadas e misturadas, inclusive na mesma sentença, conforme a que for mais conveniente ou clara em cada momento.

A lógica clássica somente lida com afirmações que são verdadeiras ou falsas. Essa característica praticamente restringe o uso da lógica para afirmações matemáticas. Mas no século 16 e 17 matemáticos começaram a estudar o cálculo de chances em jogos de azar (dados, roletas, loteria, etc.). No início do século 20 estas investigações haviam evoluído para a *teoria da probabilidade*, que permite expressar nosso grau de confiança a respeito de afirmações incertas, e raciocinar com precisão sobre elas; e para a *estatística*, um conjunto de técnicas para analisar dados experimentais que supostamente confirmam ou refutam tais afirmações.

Em meados do século XX, motivada pela expansão do rádio, telefone e outros meios eletrônicos de comunicação, a teoria da probabilidade por sua vez deu origem à *teoria da informação*, que permite determinar, por exemplo, a capacidade real de canais de comunicação na presença de distúrbios aleatórios no sinal recebido. Finalmente, com o surgimento do computador digital, surgiram disciplinas matemáticas específicas para raciocinar precisamente com programas e estruturas de dados, incluindo *análise de algoritmos*, *teoria da computabilidade e complexidade de funções*, *criptografia digital*, e muitas outras.