

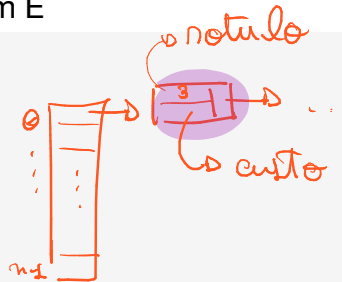
Caminhos mínimos ponderados em DAGs e em grafos sem custos negativos

Vamos falar do problema de encontrar caminhos mínimos em grafos ponderados.

Neste problema recebemos como entrada:

- Um grafo $G = (V, E)$,
- com custo $c(e)$ em cada aresta e em E

```
typedef struct noh Noh;
struct noh {
    int rotulo;
    int custo;
    Noh *prox;
};
```



- e um vértice origem s .

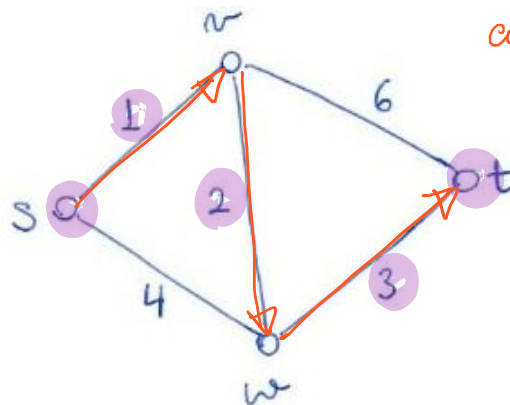
Quiz: Como adaptar a imp. da matriz de adjacências p/ lidar c/ custos nas arestas?

Nosso objetivo é encontrar:

- O valor/custo do caminho mínimo de s até cada vértice v em V ,
 - i.e., a distância de s a v .
- Também gostaríamos que esses caminhos fossem devolvidos.

Exemplo de grafo com custos nas arestas:

- Caminho mínimo de s até t .



$$\text{custo} = 1 + 2 + 3 = 6$$

Mas, busca em largura não encontra caminhos mínimos

- ao explorar o grafo em camadas centradas em s ?
 - Por que voltamos a esse problema? O que mudou?

Resp.: Busca em largura só funciona em grafos não ponderados,

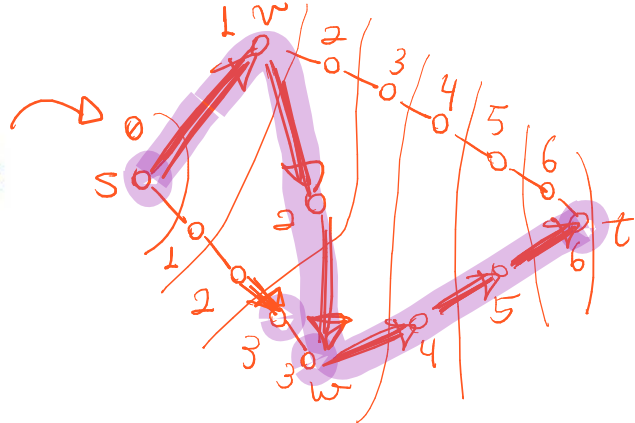
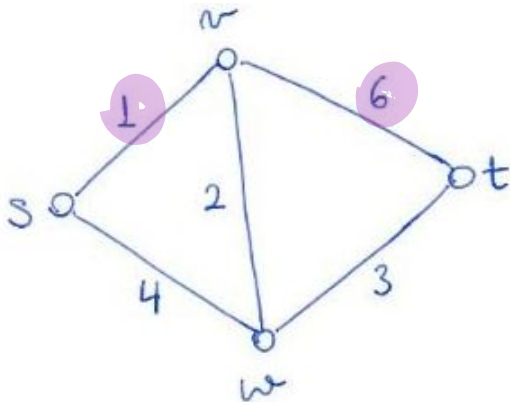
- ou seja, naqueles em que toda aresta tem custo uniforme.
- Note que, se aplicarmos busca em largura no exemplo anterior,
 - ela não nos devolve corretamente o caminho mínimo de s a t .

Para contornar este problema, observe que podemos converter

- uma entrada do problema de caminhos mínimos ponderados
 - em uma entrada não ponderada. Como?

Resp.: Substituindo cada aresta e com custo $c(e)$

- por um caminho com $c(e)$ arestas e $c(e) - 1$ novos vértices.
 - O seguinte exemplo mostra esse procedimento

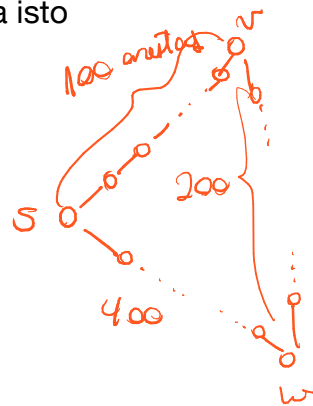
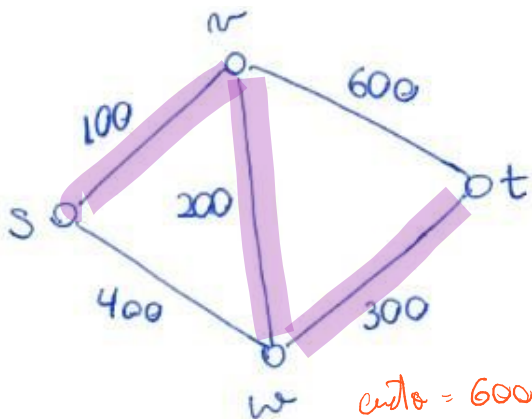


- Se utilizarmos o algoritmo de busca em largura neste grafo
 - resolvemos o problema de caminhos mínimos ponderados.

No entanto, essa solução pode não ser eficiente. Por que?

Resp.: Porque o grafo modificado tem o número de vértices e arestas

- aumentado em proporção ao custo $c()$ das arestas.
 - O seguinte exemplo evidencia isto



- Observe que, o grafo modificado pode crescer exponencialmente,
 - pois um custo que é representado usando k de bits
 - pode implicar da ordem de 2^k novos vértices.

A seguir, vamos estudar o problema de encontrar

- caminhos mínimos ponderados em um tipo de grafo específico.
- Este caso particular do problema possui uma solução muito eficiente,
 - que se baseia na solução para um problema
 - que estudamos recentemente.

Caminhos mínimos ponderados em DAGs

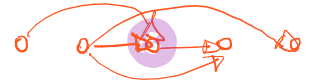
Seja s nosso vértice origem, note que,

- se considerarmos todos os caminhos a partir de s
 - que chegam em um vértice v ,
- e escolhermos o menor destes caminhos,
 - teremos o caminho de custo mínimo de s a v ,
 - e o valor deste caminho é a distância desejada.
- Em geral, considerar todos os caminhos não é eficiente,
 - pois o número de caminhos cresce fatorialmente.

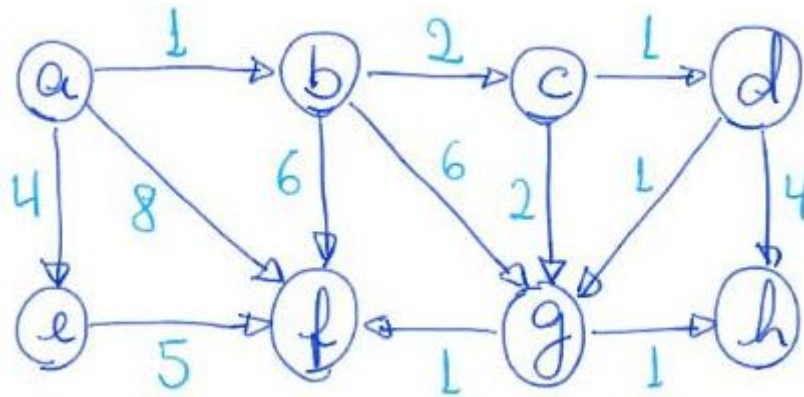
c/. relação ao
de vértices

A ideia central do algoritmo é encontrar uma ordem

- para visitar os vértices do grafo dirigido acíclico (DAG),
 - que nos permita encontrar eficientemente
 - todos os caminhos que chegam em cada vértice.
- Como veremos a seguir, essa ordem é a ordenação topológica.



Considere o seguinte grafo dirigido acíclico com custos nos arcos.

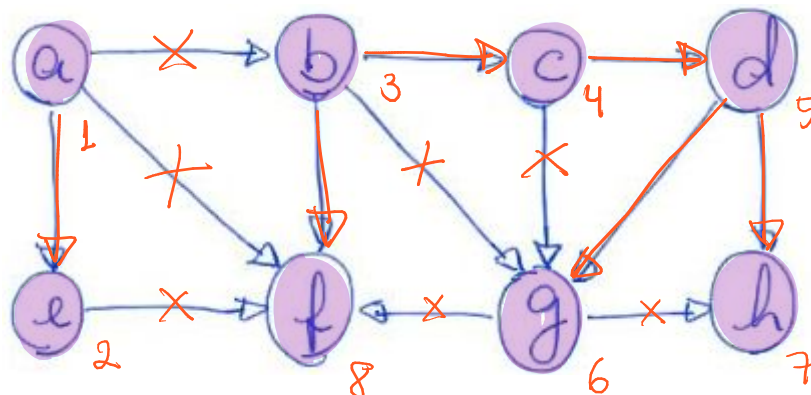


Vamos encontrar uma ordenação topológica para este DAG.

- Desconsideramos os custos nos arcos, pois eles não afetam a ordenação.

Para realizar a ordenação realizamos um loop da busca em profundidade (DFS),

- i.e., invocamos a DFS a partir de cada vértice não visitado,
 - e esta rotula cada vértice que for “finalizado” em ordem decrescente,
- lembrando que um vértice é finalizado
 - quando todos os caminhos a partir dele já foram explorados.

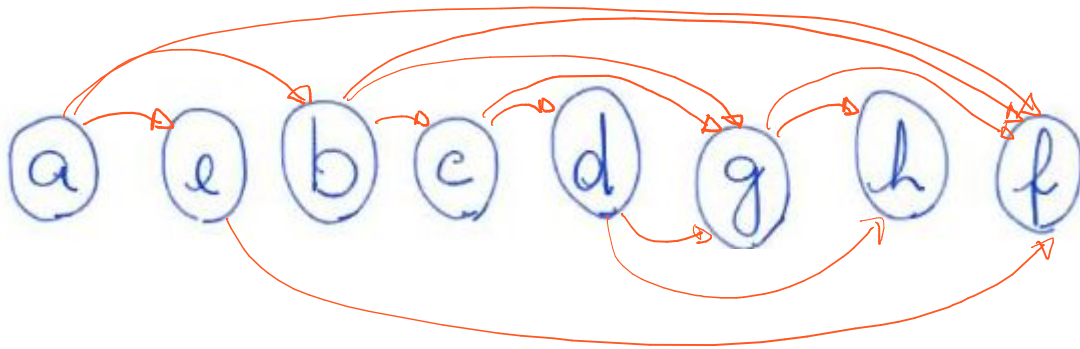


$n = 8$

1ª DFS
começa em b

2ª DFS
começa em a

Linearizando o DAG segundo a ordem topológica encontrada



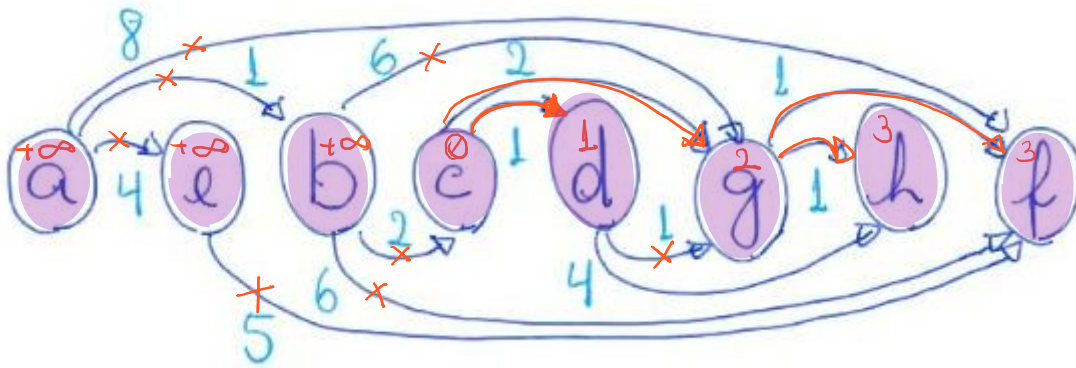
- Note que, como esperado, todos os arcos vão da esquerda para a direita.

A partir de agora consideramos os custos, já que vamos calcular as distâncias,

- e fazemos, para cada v em V ,
 - $dist[v] = +\infty$
 - $pred[v] = NULL$

A exceção é o vértice origem s , que recebe

- No nosso exemplo, digamos que c é o vértice origem.



Então, visitamos os vértices da esquerda para a direita,

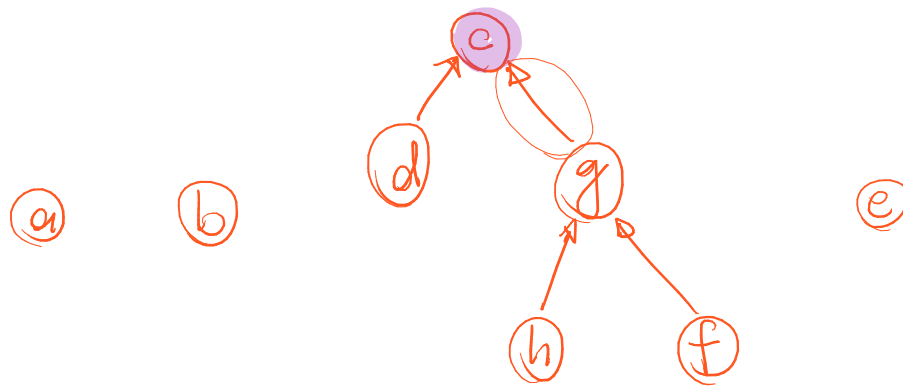
- i.e., seguindo a ordenação topológica,
 - e em cada vértice visitado consideramos os arcos que saem dele.
- Para cada arco (u, v) considerado
 - se $dist[u] + c(u, v) < dist[v]$ atualizamos
 - $dist[v] = dist[u] + c(u, v)$
 - $pred[v] = u$

Note que, na iteração em que visitamos um vértice,

- todos os caminhos que chegam nele já foram considerados.
- Por isso, a distância da origem até o vértice é calculada corretamente.

Observe que, cada "apontador" no vetor **pred** corresponde

- ao **antecessor** de um vértice em seu **caminho mínimo**.
 - Por isso, **pred** permite reconstruir os caminhos mínimos.
- Note que, essa coleção de caminhos forma uma **árvore** com **raiz na origem**.



Pseudocódigo do algoritmo:

distancias DAG ($G = (V, E)$, c , s)

$O(n+m)$

ordem = **ordenacaoTop**(G)

$O(n)$

para cada $v \in V$ fazer $dist[v] = +\infty$ e $pred[v] = NULL$

$dist[s] = 0$

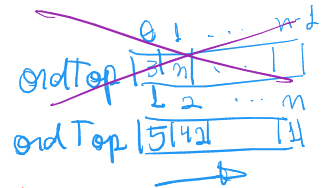
➔ para cada $v \in V$, seguindo a **ordem**

para cada arco (v, w)

se $dist[v] + c(v, w) < dist[w]$

$dist[w] = dist[v] + c(v, w)$

$pred[w] = v$



$O(n+m)$

Duas curiosidades são que:

- Este algoritmo **funciona** mesmo que os arcos tenham **custos negativos**,
 - pois em um **DAG** não é possível formar **circuitos de custo negativo**.
- Ele também pode ser adaptado para
 - o problema de **encontrar caminhos de custo máximo**,
 - que em geral é bem mais difícil,
 - justamente por ter de lidar com circuitos.

Eficiência:

- **$O(n+m)$** , sendo n o número de vértices e m o número de arcos.
 - Resultado deriva da eficiência da busca em profundidade (DFS)
 - e da passada linear pelos vértices,
 - em que cada arco é considerado uma única vez.
- Note que, assim como no algoritmo de Kosaraju
 - para encontrar componentes fortemente conexos
- é importante que a **ordenação topológica** devolva a ordem
 - em um **vetor indexado** pela posição de cada vértice
 - e cujos **conteúdos** são os **rótulos dos vértices**.

Código do algoritmo para cálculo de distâncias em um DAG:

```
void distanciasDAG(Grafo G, int origem, int *dist, int *pred) {
    int i, *ordTopo;
    int v, w, custo;
    Noh *p;
    for (i = 0; i < G->n; i++) {
        dist[i] = __INT_MAX__;
        pred[i] = -1;
    }
    dist[origem] = 0;
    ordTopo = malloc((G->n + 1) * sizeof(int));
    ordenacaoTopologica(G, ordTopo);
    for (i = 1; i <= G->n; i++) {
        v = ordTopo[i];
        p = G->A[v];
        while (p != NULL) {
            w = p->rotulo;
            // aumento da estrutura do grafo para armazenar custos dos arcos
            custo = p->custo;
            if (dist[w] > dist[v] + custo) {
                dist[w] = dist[v] + custo;
                pred[w] = v;
            }
            p = p->prox;
        }
    }
    free(ordTopo);
}
```

por que não usei -1?

Código da ordenação topológica com pequenas modificações para esta aplicação:

```
void ordenacaoTopologica(Grafo G, int *ordTopo) {
    int v, rotulo_atual, *visitado;
    visitado = malloc(G->n * sizeof(int));
    /* inicializa todos como não visitados */
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        visitado[v] = 0;
    rotulo_atual = G->n;
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        if (visitado[v] == 0)
            buscaProfOrdTopoR(G, v, visitado, ordTopo,
                               &rotulo_atual);
    free(visitado);
}

void buscaProfOrdTopoR(Grafo G, int v, int *visitado, int *ordTopo,
                      int *protulo_atual) {
    int w;
    Noh *p;
    visitado[v] = 1;
    /* para cada vizinho de v que ainda não foi visitado */
    p = G->A[v];
    while (p != NULL) {
        w = p->rotulo;
        if (visitado[w] == 0)
            buscaProfOrdTopoR(G, w, visitado, ordTopo,
                               protulo_atual);
        p = p->prox;
    }
    // ordenação armazenada em vetor indexado por posição
    ordTopo[*protulo_atual] = v;
    (*protulo_atual)--;
}
```

Algoritmo de Dijkstra

Vamos abordar o problema de encontrar

- caminhos mínimos ponderados em grafos gerais.
- Para tratar este problema, vamos estudar o algoritmo de Dijkstra,
 - um dos maiores clássicos da computação.

Primeiro, vamos relembrar o algoritmo de busca em largura

- para cálculo de distâncias, que é generalizado pelo algoritmo de Dijkstra.

distâncias ($G = (V, E), s$)

para todo $v \in V$ faça $dist[v] = +\infty$ e $pred[v] = NULL$

$dist[s] = 0$

insira s na fila Q

enquanto $Q \neq \emptyset$

remova v de Q

para cada arco (v, w)

se $dist[w] == +\infty$

$dist[w] = dist[v] + 1$ $pred[w] = v$

insira w em Q

No pseudocódigo de Dijkstra, para simplificar, vamos supor

- que todos os vértices do grafo são alcançáveis a partir do vértice s .
- Se esse não for o caso, podemos focar nos vértices alcançáveis
 - realizando uma busca inicial a partir de s ,
- ou modificar levemente o algoritmo de Dijkstra.
 - Quiz1: Como fazer isso?

A seguir, observem as semelhanças com o algoritmo

- para cálculo de distâncias não ponderadas, baseado na BFS?
- E com o algoritmo para cálculo de distâncias em DAGs, baseado na DFS?

Dijkstra ($G = (V, E), c, s$)

Para todo $v \in V$ faça $dist[v] = +\infty$ e $pred[v] = NULL$

$dist[s] = 0$

$R = \{ \}$

enquanto $R \neq V$

pegar $v \in V \setminus R$ com menor $dist[v]$

adicione v a R

para toda aresta (v, w)

se $w \in V \setminus R$

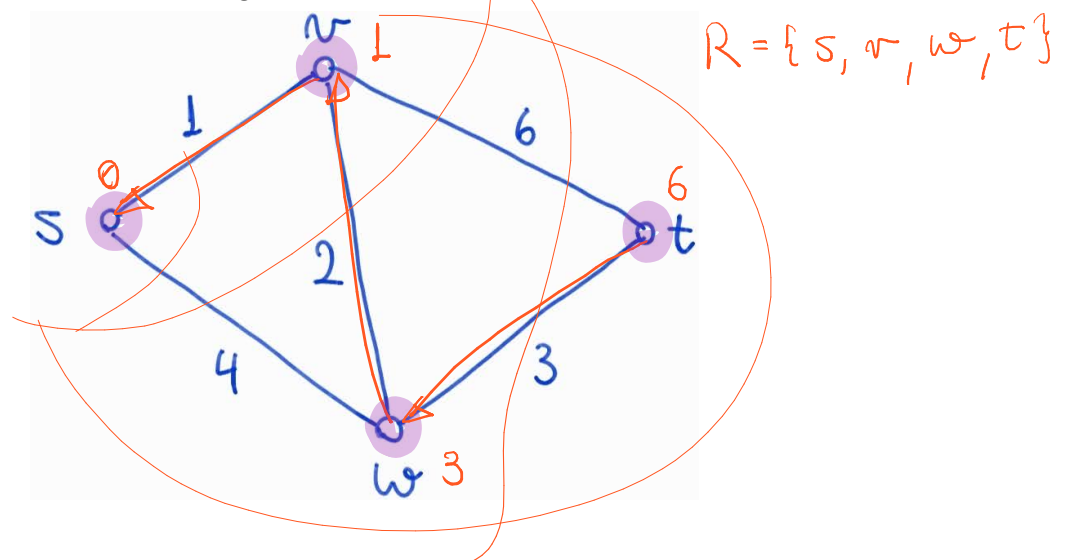
se $dist[w] > dist[v] + c(v, w)$

$dist[w] = dist[v] + c(v, w)$

$pred[w] = v$

↳ escolha gulosa

Exemplo de funcionamento do algoritmo:

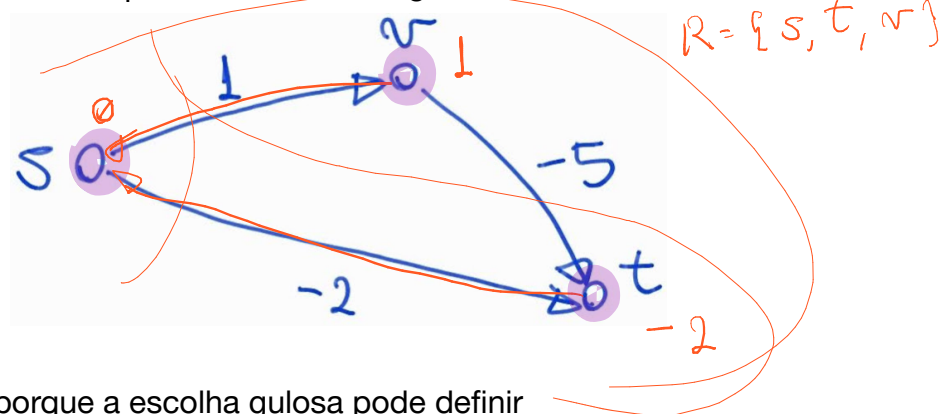


Antes de provarmos a **corretude** deste algoritmo,

- de tratarmos dos detalhes de **implementação**
 - e da **eficiência** do mesmo,
- vamos analisar suas limitações, a fim de compreendê-lo melhor.

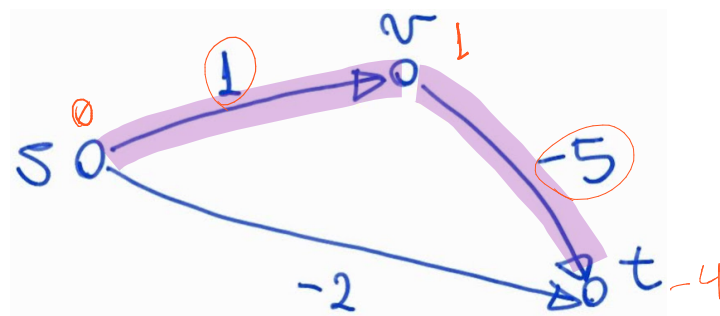
Em particular, esse algoritmo pode não devolver a solução correta

- quando as arestas apresentam custo negativo.



O algoritmo falha porque a escolha gulosa pode definir

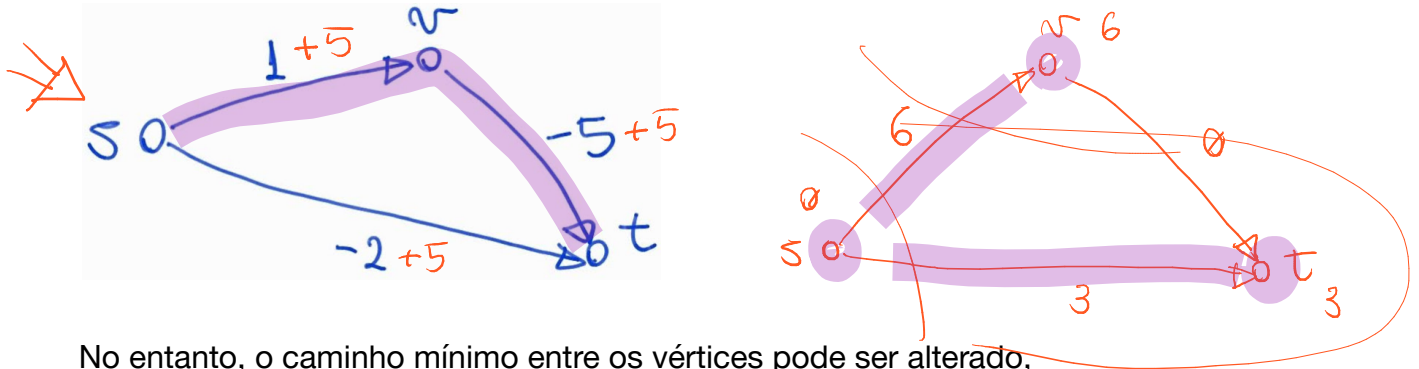
- uma certa distância para um vértice,
 - sem considerar um caminho menor.
- Isso ocorre quando tal caminho possui um custo maior na sua parte inicial,
 - que depois é reduzido por conta de arestas de custo negativo.
- No nosso exemplo, o caminho $s \rightarrow v \rightarrow t$, que tem custo -4,
 - nunca é considerado pelo algoritmo.



Bônus: redução entre problemas

Poderíamos, ainda, pensar em reduzir o problema com arestas negativas

- para o problema sem essas arestas.
- Uma tentativa seria somar o valor absoluto da aresta mais negativa
 - no comprimento de todas as arestas.
- Isso certamente faria com que o grafo não tivesse mais arestas negativas.



No entanto, o caminho mínimo entre os vértices pode ser alterado,

- pois caminhos com números diferentes de arestas
 - seriam afetados de modo distinto.

Como regra geral, quando tentamos eliminar custos negativos,

- se as soluções do seu problema tem número variado de objetos
 - (no caso de caminhos mínimos os objetos são as arestas)
- então somar um mesmo valor no custo de cada objeto
 - afetará mais o custo de soluções com maior cardinalidade,
 - e menos o custo daquelas com menor cardinalidade.
- Assim, não há garantia de que
 - a ordem relativa dos custos das soluções será preservado.
- Por isso, esse procedimento não é recomendado.

Por outro lado, se todas as soluções do seu problema

- tem a mesma cardinalidade,
 - i.e., o mesmo número de objetos,
- então somar um mesmo valor no custo de cada objeto
 - afetará homogeneamente o custo de todas as soluções.
- Neste caso, como a ordem relativa dos custos das soluções é preservada,
 - o procedimento é seguro.
- Este é o caso, por exemplo, do problema da árvore geradora mínima,
 - que é um problema central em otimização combinatória e grafos.