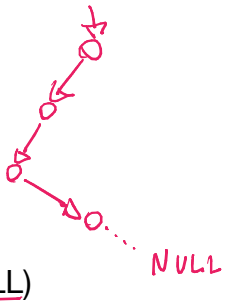
AED2 - Aula ~~05~~ 15 - bônus 2

Árvores rubro-negras

Árvores rubro-negras são árvores binárias de busca balanceadas,

- que usam rotações mas não usam fator de balanceamento.

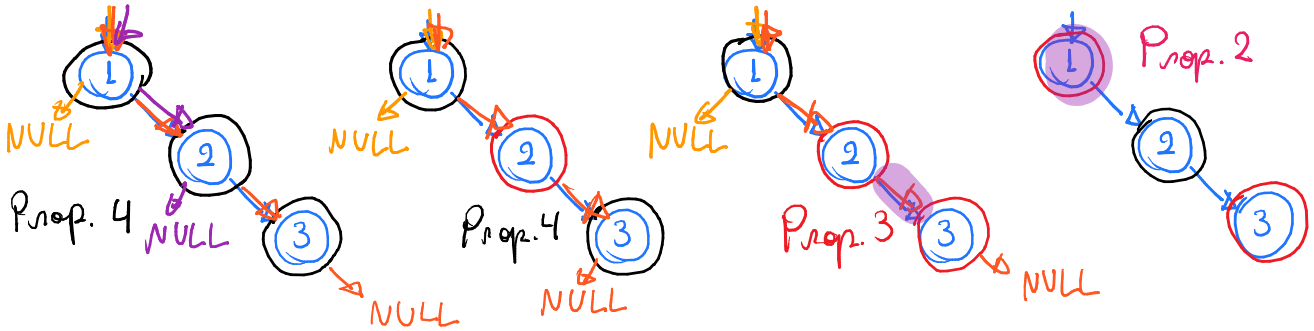


Definição:

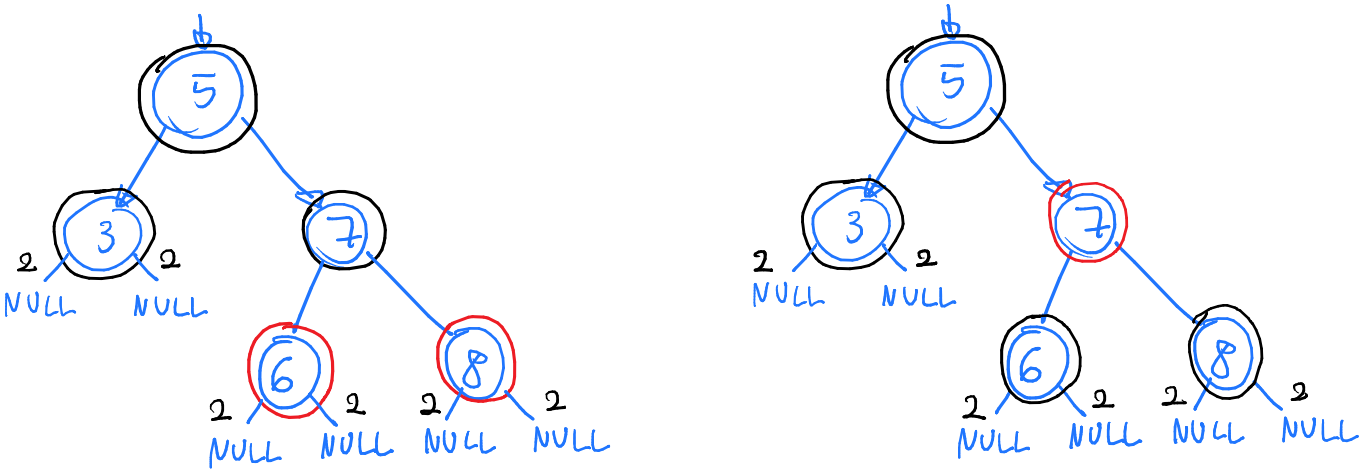
1. Cada nó é vermelho ou preto.
2. Raiz é sempre preta.
3. Dois nós vermelhos não podem ser adjacentes,
    - ou seja, um nó vermelho só pode ter filhos pretos.
4. Todo caminho da raiz até um apontador NULL (caminho raiz-NULL)
    - tem o mesmo número de nós pretos.
        - Pense nesses caminhos como buscas mal sucedidas.

Para ganhar intuição de que essas propriedades levam a uma árvore balanceada

- note que uma lista com três nós já não pode ser uma árvore rubro-negra.



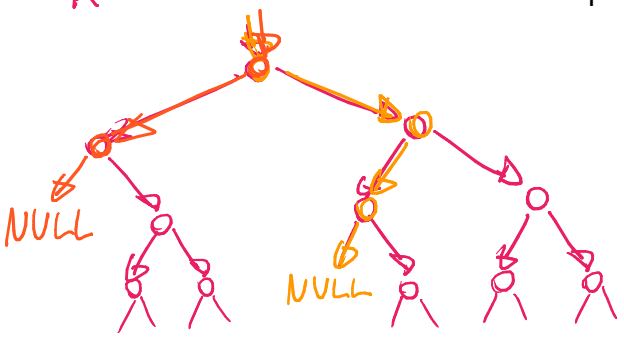
Exemplos de árvores rubro-negras:



Altura máxima de árvores rubro-negras

Lembre que a altura de uma árvore é igual
- ao comprimento do maior caminho raiz-NULL.
- Assim, queremos limitar superiormente o comprimento de qualquer caminho.

Observe que, se todo caminho raiz-NULL de uma árvore tem pelo menos k nós,
- então os primeiros k níveis da árvore devem estar completos.



Caso contrário, haveria um caminho da raiz até o nó ausente, resultando
- em um caminho raiz-NULL de comprimento menor que $k-1$
- lembrando que comprimento de um caminho p é $|V(p)| - 1$

Supondo que os primeiros k níveis da árvore estão completos,
- o número de nós n desta árvore é maior ou igual que
  - o número de nós numa árvore binária completa de altura $k-1$
    - ou seja, $n \geq 2^k - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1}$
- Portanto, $2^k \leq n+1 \Rightarrow k \leq \lg(n+1)$

Note que, numa árvore rubro-negra, pela propriedade 4 da definição,
- todo caminho raiz-NULL tem um mesmo número de nós pretos.
  - Digamos que este número é k
- Assim, só os nós pretos já preenchem os primeiros k níveis da árvore.

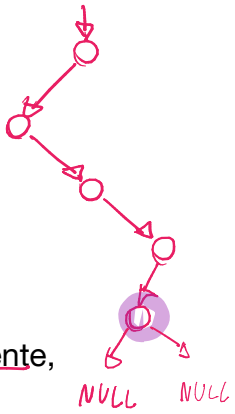
Desta observação, temos um limitante superior para o número de nós pretos
- em qualquer caminho raiz-NULL, i.e., $k \leq \lg(n+1)$
- No entanto, queremos um limitante para o número total de nós
  - em qualquer caminho, já que isso limita a altura da árvore.

Pelas propriedades 1 e 3 da definição, todo caminho tem no máximo
- um nó vermelho para cada nó preto,
  - já que os caminhos começam na raiz, que é preta,
- e não são permitidos dois nós vermelhos consecutivos.

Assim, o número total de nós em qualquer caminho raiz-NULL da árvore é
- no máximo 2 vezes o número de nós pretos $= 2k \leq 2\lg(n+1)$

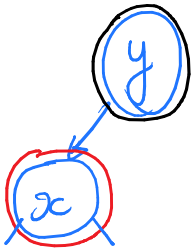
Como a altura da árvore é igual ao comprimento do maior caminho raiz-NULL,
- e o comprimento de um caminho é menor que o seu número de nós,
  - o resultado segue.

Inserção em árvores rubro-negras



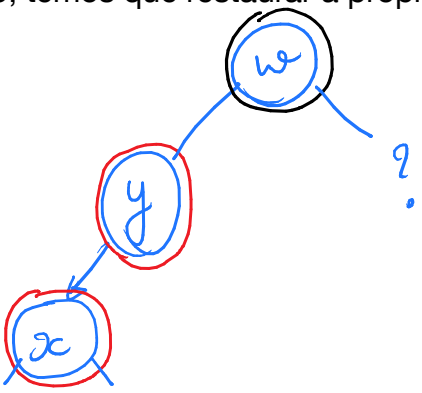
A ideia geral é inserir o novo nó como uma folha vermelha,
- após percorrer um caminho descendente na árvore,
- e usar recolorações e rotações para restabelecer as propriedades,
  - ao percorrer o caminho no sentido ascendente.
- A seguir vamos analisar alguns casos que podem ocorrer,
  - na volta da recursão, quando percorremos o caminho ascendente,
    - sempre considerando que o nó corrente é x

Caso 1: se y, o pai de x, não for vermelho,



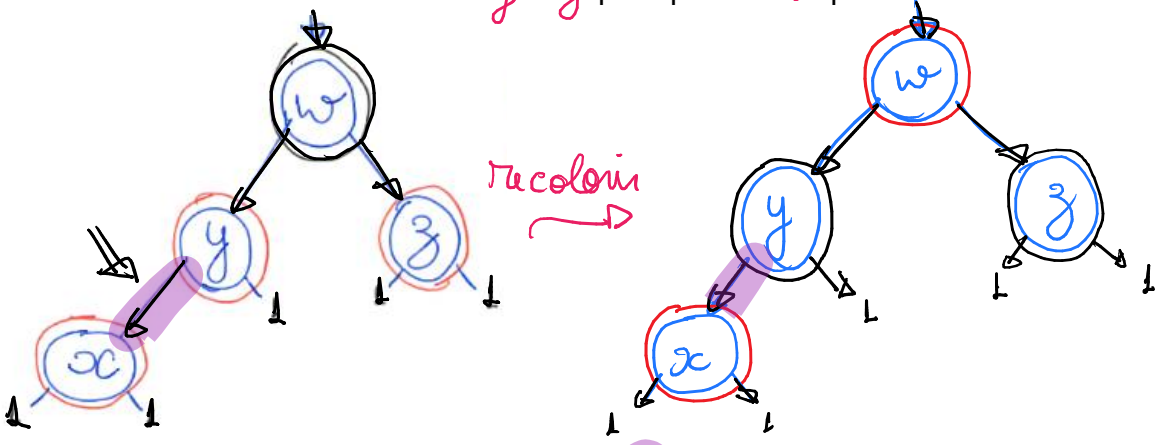
- as propriedades da definição estão mantidas e nada precisa ser feito.

Caso 2: se y é vermelho, temos que restaurar a propriedade 3.



- Sabemos que y não é a raiz, por conta da propriedade 2,
  - e que w, o pai de y, é preto, por conta da propriedade 3.

Caso 2.1: w tem outro filho z que tem cor vermelha.
- Neste caso vamos recolorir y e z para preto e w para vermelho.

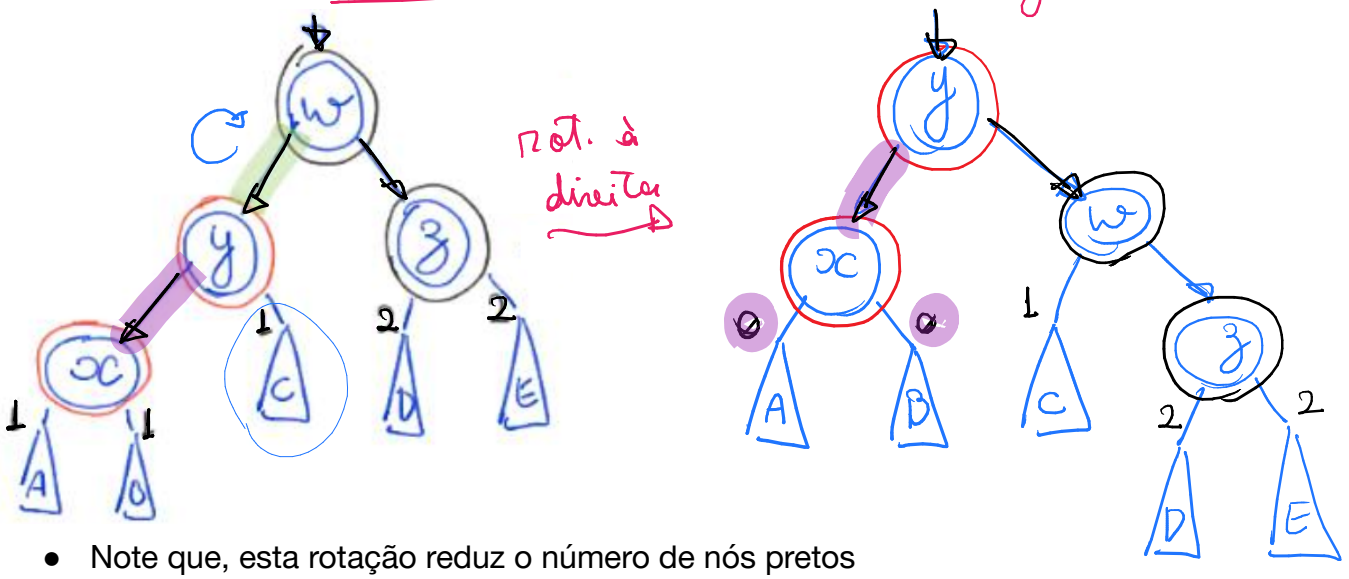


- Note que preservamos a propriedade 4, pois
  - todo caminho que passava por w passa por y ou por z
    - e restauramos a propriedade 3 entre x e y
- Ao continuar a subida na árvore, será necessário analisar a situação de w
  - que ficou vermelho, pois ele pode violar a propriedade 3.
- Se w for a raiz da árvore, basta mudar a cor dele para preto.
  - Quiz1: Por que isso não viola as propriedades?

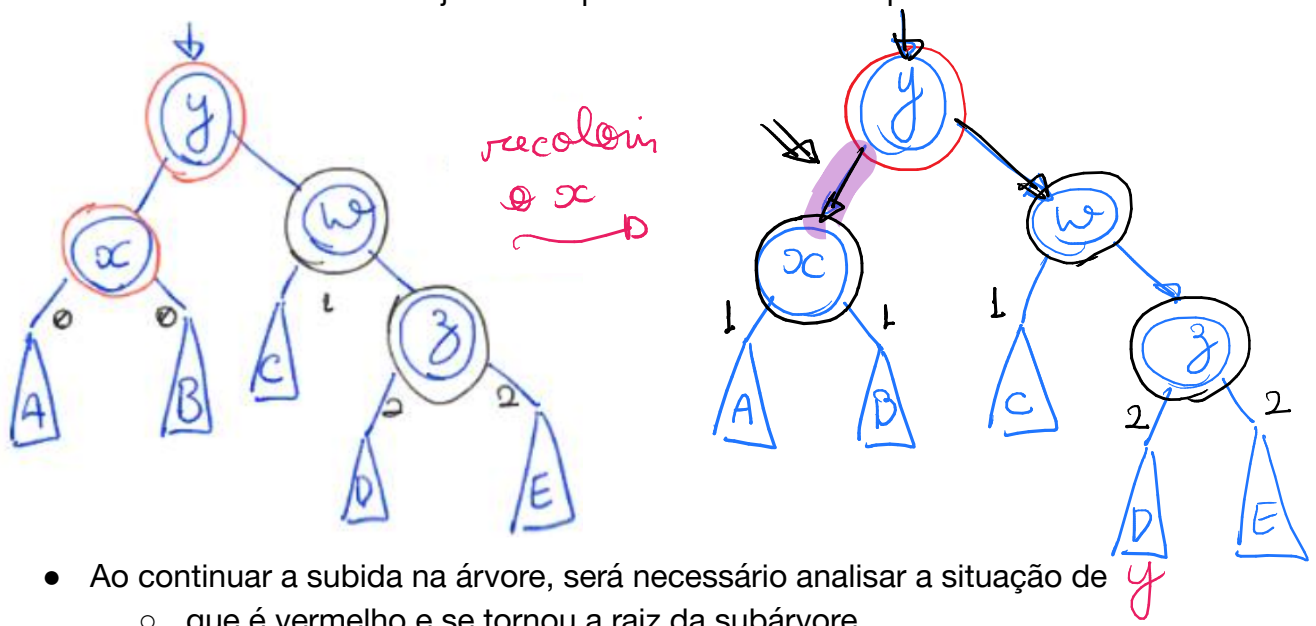
Caso 2.2: w não tem outro filho vermelho.

- Neste caso, w pode ter outro filho preto ou não ter outro filho.
  - Primeiro, vamos considerar a presença de um nó preto z

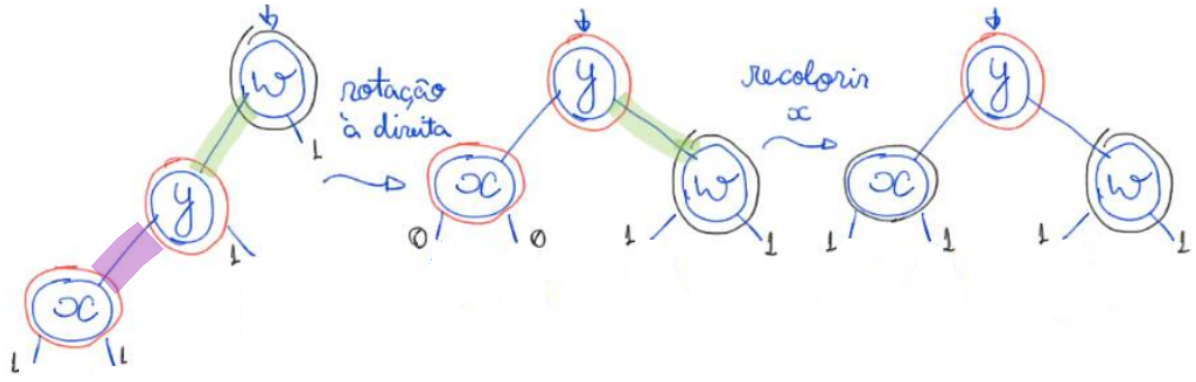
- Fazemos uma rotação à direita que inverte a relação entre w e y



- Note que, esta rotação reduz o número de nós pretos
  - nos caminhos que vão da raiz até os filhos de x
- Então mudamos a cor de x para preto, o que resolve tanto o problema
  - dos vermelhos adjacentes quanto do número de pretos nos caminhos.



- Ao continuar a subida na árvore, será necessário analisar a situação de y
  - que é vermelho e se tornou a raiz da subárvore,
    - pois ele pode violar a propriedade 3 com relação a seu pai.
  - Se y for a nova raiz da árvore, basta mudar a cor dele para preto.
- Note que, se w não tiver outro filho, a mesma solução funciona.



Quiz2: Como resolver o caso em que x é ~~inserido como~~ filho direito de y ?

Inserção em árvores rubro-negras esquerdistas

Embora nossos tratamentos dos casos anteriores estejam corretos,

- uma vez que eles restauram as propriedades da árvore rubro-negra,
  - sua implementação é um tanto complicada,
    - por ser necessário manipular antecessores do nó corrente.
- Por isso, vamos estudar a implementação da inserção
  - de um tipo especial de árvore rubro-negra,
- que é conhecida como árvore rubro-negra esquerdista,
  - pois os nós vermelhos sempre são filhos esquerdos.

A seguir o código para a estrutura de um nó de árvore rubro-negra:

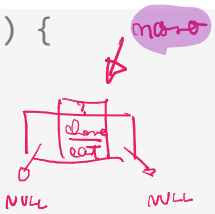
```
typedef int Item;
typedef int Chave;

typedef struct noh {
   int vermelho;
   Chave chave;
   Item conteudo;
   struct noh *pai;
   struct noh *esq;
   struct noh *dir;
} Noh;

typedef Noh *Arvore;
```

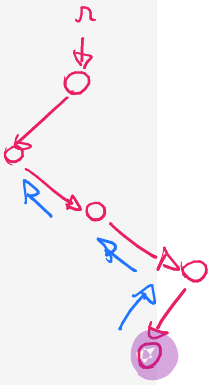
A seguir apresentamos a implementação recursiva,

- introduzida por Sedgewick, de uma árvore rubro-negra esquerdista.

```
Noh *novoNoh(Chave chave, Item conteudo) {
   Noh *novo;
   novo = (Noh *)malloc(sizeof(Noh));
   novo->vermelho = 1;
   novo->chave = chave;
   novo->conteudo = conteudo;
   novo->esq = NULL;
   novo->dir = NULL;
   return novo;
}
```

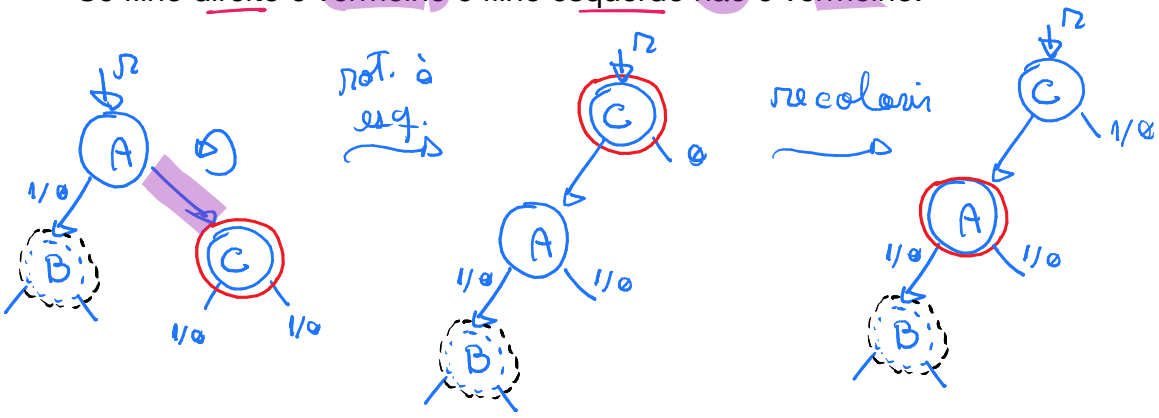
```
Arvore inserir(Arvore r, Chave chave, Item conteudo) {
   Noh *novo = novoNoh(chave, conteudo);
   return insereRN(r, novo);
}

Arvore insereRN(Noh *r, Noh *novo) {
   if (r == NULL) { // subárvore era vazia
       novo->pai = NULL;
       return novo;
   }
   if (novo->chave <= r->chave) { // desce à esquerda
       r->esq = insereRN(r->esq, novo);
       r->esq->pai = r;
   }
   else { // desce à direita
       r->dir = insereRN(r->dir, novo);
       r->dir->pai = r;
   }
```





Estamos na volta da recursão (caminho ascendente) e vamos tratar alguns casos:

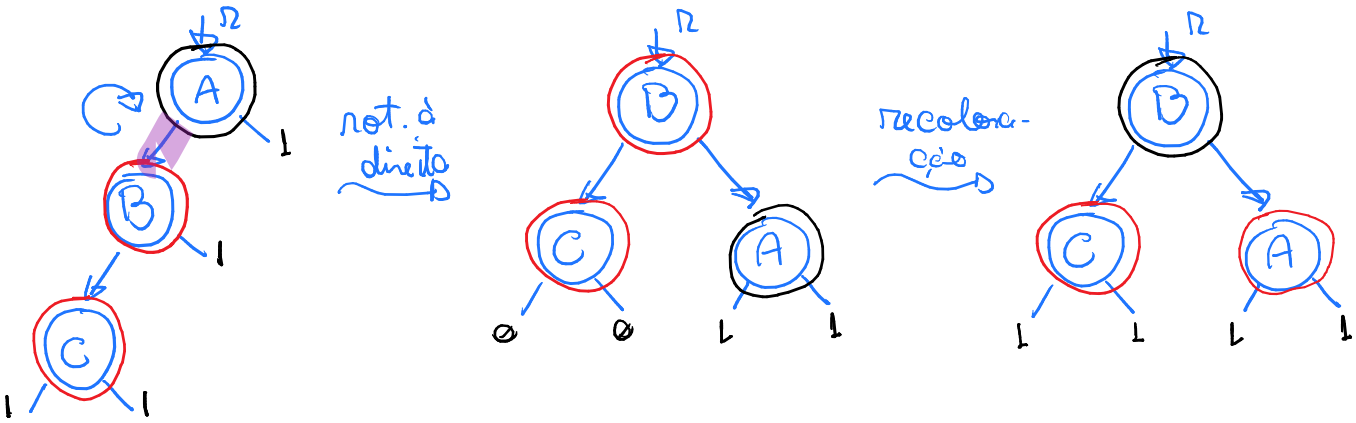
- Se filho direito é vermelho e filho esquerdo não é vermelho.



  - Note que A pode ser preto ou vermelho,
    - e que sua cor é herdada por C.

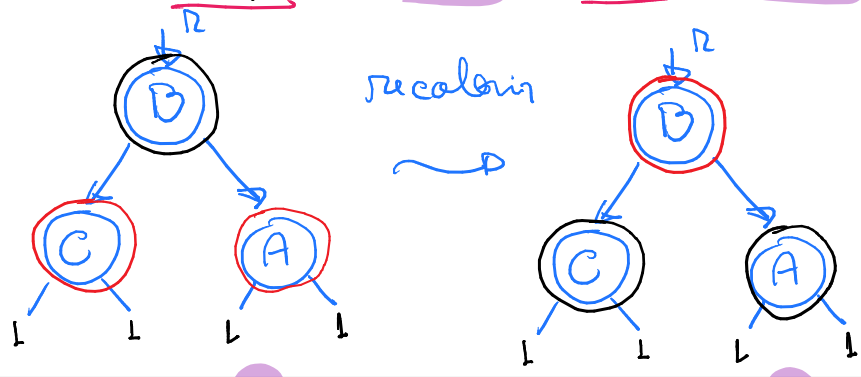
```
   if (r->dir != NULL && r->dir->vermelho == 1 && (r->esq == NULL ||
r->esq->vermelho == 0)) {
       r = rotacaoEsq(r);
       r->vermelho = r->esq->vermelho;
       r->esq->vermelho = 1;
   }
```

- Se filho esquerdo é vermelho e filho esquerdo do filho esquerdo é vermelho.




```
    if (r->esq != NULL && r->esq->vermelho == 1 && r->esq->esq !=
NULL && r->esq->esq->vermelho == 1) {
        // se filho e neto esquerdos forem vermelhos faz rotação a
direita e recolore de acordo
        r = rotacaoDir(r);
        r->vermelho = 0;
        r->dir->vermelho = 1;
    }
```

- Se filho esquerdo é vermelho e filho direito é vermelho.




```
    if (r->esq != NULL && r->esq->vermelho == 1 && r->dir != NULL &&
r->dir->vermelho == 1) {
        // se os dois filhos são vermelhos, troque a cor com o pai
preto
        r->esq->vermelho = 0;
        r->dir->vermelho = 0;
        r->vermelho = 1;
    }
    return r;
}
```

É interessante analisar como as operações anteriores

- garantem tanto as propriedades tradicionais das árvores rubro-negras,
    - quanto a propriedade adicional da árvore rubro-negra esquerdista,
        - i.e., os nós vermelhos sempre são filhos esquerdos.