Propósito: aprender técnicas de projeto e análise de algs.
- divisão e conquista
- algs. gulosos
- prog. dinâmica
- aleatoriedade
- NP-completude

PAA - Aula 02

Princípios da Análise de Algoritmos, Indução Matemática

Análise de pior caso: por que ser tão pessimista?

- Resultado independe da entrada e é mais simples de analisar,
  - em contraste com análises de melhor caso, caso médio e benchmark.
- Assim, análise de pior caso é apropriada para algoritmos de propósito geral.

→ complicada e dependente

→ empírica e muito dependente

→ simples, muito dependente

Pouca atenção para constantes multiplicativas e termos de menor ordem:

- Simplifica a análise.
- Se preocupar com constantes seria inapropriado, já que elas dependem de
  - detalhes de implementação, linguagem, compilador e arquitetura.
- Termos de menor ordem se tornam irrelevantes quando a entrada cresce.
  - Ex.: n^2 + 100n vs. n^2 para n = 10000.
- Comparação entre algoritmos é preditiva na maior parte dos casos.

$5n^2 + 10n = n^2$

$n^2 = 10^8 \;\|\; n^2 + 100n = 10^8 + \underbrace{100 . 10^4}_{= 10^6} = 101 . 10^6$

Obs: constantes são relevantes na prática. Mas, em geral, tem impacto menor que a escolha de algoritmos e estruturas de dados adequadas.

- Ex.: um bubbleSort super polido ainda é muito pior que qualquer mergeSort.

Foco no comportamento dos algoritmos para entradas grandes:

- Caso contrário força bruta resolve.
- Por isso, termos de menor ordem ficam insignificantes e
- o crescimento do tempo em função de n importa mais do que constantes.
  - Ex.: 100 n lg n vs. n^2 para n = 1000000.

mergeSort   bubbleSort

$\boxed{n^2 = (10^6)^2 = 10^{12} = 1 \text{ trilhão}}$

$\boxed{100\, n \lg n} = 100 \cdot 10^6 \lg 10^6 = 10^8 \cdot \lg (10^3)^2$

$\approx 10^8 \cdot \lg (2^{10})^2$

$= 10^8 \cdot \lg 2^{20}$

$= 10^8 \cdot 20 \cdot \lg 2$

$= 2 \cdot 10^9$

$= \boxed{2 \text{ bilhões}}$

Neste curso estamos interessados em algoritmos rápidos, e usamos a seguinte definição matemática para o que é um algoritmo rápido:

- Um algoritmo cujo tempo de execução no pior caso
  - cresce devagar em função do tamanho da entrada.
- Por devagar queremos dizer perto de linear. $O(n^1)$ $O(n^1 \lg n)$
  - Uma definição mais geral diria "cresce de modo polinomial". $O(n^k)$
- Essa definição é vantajosa por apresentar duas características.
  - É tratável na análise e é preditiva na prática.

Na próxima aula estudaremos análise assintótica,

- que usaremos para formalizar vários desses princípios.

Indução matemática

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \overset{?}{=} 2^{n+1} - 1$$

Exemplo 1: Mostrar que 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = $\boxed{\text{2^n+1 - 1}}$.

Base: p/ $n = 0$ temos $\boxed{\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{n+1} - 1}$

H.I.: $\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i} = 2^{(n-1)+1} - 1 = \boxed{2^n - 1}$

Passo:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} 2^i} = 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \underset{\text{pela H.I.}}{=} 2^n + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = \boxed{2^{n+1} - 1} \quad \blacksquare$$

Na demonstração por indução queremos provar que:

- uma propriedade P associada a um parâmetro n, i.e., P(n),
- vale para todo número natural n, i.e., [n = 0, 1, 2, 3, …]

Para tanto seguimos a seguinte estrutura: ?

- Base: mostramos que P(1) vale.
- H.I.: supomos que P(n-1) vale.
- Passo: mostramos que P(n) vale a partir da Hipótese de Indução (H.I).

Exemplo 2: Mostrar que a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Base: p/ $n=1$ temos $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2.1-1 = 1 = n^2$

H.I.: $\boxed{\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1) = (n-1)^2}$

Passo: $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)} = (2n-1) + \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1) \overset{\text{pela H.I.}}{=} 2n-1 + (n-1)^2 = \cancel{2n}-\cancel{1} + n^2 - \cancel{2n} + \cancel{1}$

$\boxed{= n^2}$ ∎

Exemplo 3: Mostrar que para naturais x e n, x^n - 1 é divisível por x - 1.

$\exists k \in \mathbb{Z} : x^n - 1 = k(x-1)$

Base: p/ $n=1$ temos $x^n - 1 = x^1 - 1 = (x-1).1$

H.I.: $\exists k' \in \mathbb{Z} : x^{n-1} - 1 = k'(x-1) \Rightarrow \boxed{x^{n-1} = k'(x-1)+1}$

Passo: $\boxed{x^n - 1} = x . x^{n-1} - 1 \underset{\text{pela H.I.}}{=} x\left(k'(x-1)+1\right) - 1 = k'x(x-1) + (x-1)$

$= (x-1)\underbrace{(k'.x+1)}_{\in \mathbb{Z}}$ ∎

$a \geq b+2$

$\Downarrow$

$a \geq b$

Exemplo 4: Mostrar que (1 + x)^n >= 1 + nx p/ todo natural n e real x com 1 + x > 0.

$(1+x)^n \geq 1+nx$

Base: p/ $n = 1$ temos $(1+x)^n = (1+x)^1 = 1 + 1x = 1 + nx$

H.I.: $\boxed{(1+x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)x}$

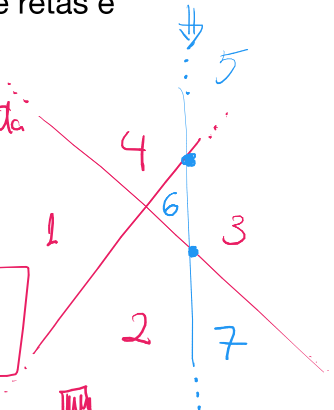
pela H.I.

Passo: $\boxed{(1+x)^n} = (1+x)(1+x)^{n-1} \geq (1+x)(1+(n-1)x) = 1 + (n-1)x + x + (n-1)x^2$

$= 1 + nx + \underbrace{(n-1)}_{\geq 1}\underbrace{x^2}_{\geq 0} \geq \boxed{1 + nx}$ ∎

Exemplo 5: Mostrar que o número de regiões do plano cortado por n retas em posição geral é $\boxed{T(n) = n(n+1)/2 + 1.}$

- Obs: um conjunto de retas está em posição geral se nenhum par de retas é paralelo e três ou mais retas não se cruzam num mesmo ponto.



Base: p/ $n=1$ temos $T(n) = 1(1+1)/2 + 1 = 2$ = # de regiões c/ 1 reta

H.I.: $\boxed{T(n-1) = (n-1)(n-1+1)/2 + 1 = (n-1)n/2 + 1}$

Passo: $\boxed{T(n) = T(n-1) + n \overset{\text{pela H.I.}}{=} \frac{(n-1)}{2}n + 1 + \frac{2n}{2} = \frac{n}{2}(n \overset{+1}{\cancel{-1+2}}) + 1}$ ∎

a n-ésima reta em pos. geral cruza n-1 retas em pontos distintos. Portanto, cruza (n-1)+1 = n regiões distintas

Exemplo 6: Mostrar que o S_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n < 1. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < 1$

Base: p/ $n=1$ temos $S_n = 1/2 < 1$

H.I.: $\boxed{S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} 1/2^i < 1}$

Passo: $\boxed{S_n} = \sum_{i=1}^{n} 1/2^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 1/2^{i-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} 1/2^i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^0} + \sum_{i=1}^{n-1} 1/2^i\right) < \frac{1}{2}(1+1) = 1$

pela H.I.

Exemplo 7: Mostrar que se $\boxed{T(n) = 4T(n/2) + cn}$ então $\boxed{T(n) = 4^i\, T(n/2^i) + (2^i - 1)\, cn}$

indução em i

Base: p/ $i=1$ temos $T(n) = 4T(n/2) + cn = 4^i T(n/2^i) + (2^i - 1)cn$ ✓

H.I.: $\boxed{T(m) = 4^{i-1} T(m/2^{i-1}) + (2^{i-1} - 1).c.m}$ $\forall m \in \mathbb{Z}^+$

Passo: $\boxed{T(n)} = 4\underbrace{T(n/2)}_{m} + cn \overset{\text{pela H.I.}}{=} 4\left(4^{i-1}\, T\left(\frac{n/2}{2^{i-1}}\right) + (2^{i-1} - 1).c.(n/2)\right) + cn$

$= 4^i\, T\left(\frac{n}{2^i}\right) + 2(2^{i-1} - 1).c.n + cn = 4^i\, T\left(\frac{n}{2^i}\right) + cn\left(2^i \cancel{-2} + \cancel{1}\right)$ -1