Alguns Exercícios do Capítulo 5 - Indução Matemática

$\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} \overset{?}{\leq} 2$

Exercício 5.1: Prove que $(\forall n \in \mathbb{N})\; 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-n} \leq 2$.

Base: $\sum_{i=0}^{0} 2^{-i} = 2^0 = 1 \leq 2$ ✓ | H.I.: $\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \leq 2$ | Passo: $\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i-1} = 1 + 2^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \leq 1 + 2^{-1}\cdot 2 = 2$

$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^{i-1} \overset{?}{=} (n-1)\cdot 2^n + 1$

Exercício 5.2: Prove que $(\forall n \in \mathbb{N})\; 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n$

Base: $\sum_{i=1}^{1} i \cdot 2^{i-1} = 1 \cdot 2^0 = 1 = 1 + (1-1)\cdot 2^0$ ✓ | H.I.: $\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot 2^{i-1} = 1 + (n-2)\cdot 2^{n-1}$ | Passo: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot 2^{i-1} + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-2)\cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^{n-1} = 1 + 2^{n-1}(n-2+n) = 1 + 2^{n-1}(2n-2) = 1 + 2^n(n-1)$ ✓

Exercício 5.3: Prove que $(\forall n \in \mathbb{N})\; 2^n > n$.

Base: $n = 0 \Rightarrow 2^n = 2^0 = 1 > 0 = n$ ✓ | H.I.: $k \in \mathbb{N}$ supomos $2^k > k$ | Passo: Vamos mostrar o resultado p/ $k+1$. $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \overset{\text{pela H.I.}}{>} k \cdot 2 = k + k > k + 1$ p/ $k \geq 1$ (precisa fortalecer a base)

(fortalecendo a base) $n = 1 \Rightarrow 2^n = 2^1 = 2 > 1 = n$ ✓

Exercício 5.4: Prove que $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})\; n^n \geq n!$ (onde $n!$ denota o fatorial de um inteiro n; veja seção 8.10).

Base: $n = 1 \Rightarrow n^n = 1^1 = 1! = n!$ ✓

H.I.: $k \in \mathbb{N}$ supomos $k^k \geq k!$

Passo: Vamos mostrar que o resultado vale p/ $k+1$. $(k+1)^{k+1} = (k+1)^k \cdot (k+1) \geq k^k(k+1) \geq k!(k+1) = (k+1)!$ ✓ (pela H.I.)

Base: $n = 0 \Rightarrow 9^n - 1 = 9^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, e $0 \bmod 8 = 0$ ✓ | H.I.: supomos que $9^k - 1 \bmod 8 = 0$ p/ $k \in \mathbb{N}$

Passo: Vamos mostrar o resultado p/ $k+1$. $9^{k+1} - 1 = 9 \cdot 9^k - 1 = 9 \cdot 9^k - 1 + 8 - 8 = 9 \cdot 9^k - 9 + 8 = 9(9^k - 1) + 8$

Pela H.I., $9^k - 1 \bmod 8 = 0$. Como $8 \bmod 8 = 0$, o resultado segue

Exercício 5.5: Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $9^n - 1$ é divisível por 8.

Base: $n = 0 \Rightarrow a^n - 1 = a^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, e $0 \bmod a-1 = 0$, pois $a - 1 > 0$ | Base: supomos $(a^k - 1) \bmod (a-1) = 0$ p/ $k \in \mathbb{N}$

Passo: vamos mostrar o resultado p/ $k+1$

Exercício 5.6: Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - 1$ é divisível por $a - 1$ para todo número inteiro $a > 1$.

$a^{k+1} - 1 = a^k \cdot a - 1 = a \cdot a^k - 1 + a - a = a \cdot a^k - a + (a-1) = a(a^k - 1) + (a-1)$, e o resultado segue pela H.I.

Dica: pense na paridade das bolas de cada cor após uma remoção.

Exercício 5.9: Suponha que uma caixa contém p bolas vermelhas e q bolas amarelas, e que o seguinte procedimento é repetido até sobrar uma única bola na caixa: "Retire duas bolas da caixa; se elas tiverem a mesma cor, coloque uma bola vermelha na caixa; se elas tiverem cores diferentes, coloque uma bola amarela na caixa. Em ambos os casos, não devolva à caixa as bolas retiradas." Descubra qual é a cor da bola que ficará na caixa, em função de p e q. Demonstre, por indução no número de bolas $p + q$, que a sua resposta está correta.

Base: $p + q = 1$ ① $p = 1$, $q = 0$ ② $q = 1$, $p = 0$

H.I.: Para $p + q = k \in \mathbb{N}$ supomos que restará uma bola de cor C

Passo: $p + q = k + 1$. Vamos analisar os casos. a) duas vermelhas b) duas amarelas c) uma de cada. Como a paridade das amarelas não muda, o resultado segue da H.I.

Ls amarela se q é ímpar e vermelha caso contrário

Exercício 5.10: Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} - 1$ é um múltiplo de 3.

5.3.4 Exercícios

Base: $n=3$

Exercício 5.11: Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n vértices, $n \geq 3$, é $180(n-2)$. Passo: tome dois lados adjacentes e remova o Δ formado por eles

H.I.: $S(k) = 180(k-2)$, p/ $k \in \mathbb{N}$ | $S(k+1) = S(k) + 180° \underset{\text{H.I.}}{=} 180(k-2) + 180 = 180(k-1) = 180((k+1)-2)$ ✓

Exercício 5.12: Prove que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados, $n \geq 3$, é dado por $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Exercício 5.13: Seja C um conjunto com $n \geq 2$ elementos. Prove que C tem $n(n-1)/2$ subconjuntos com exatamente dois elementos.

Ideia p/ o passo: remova um elemento. Use a H.I. Devolva o elemento e veja quantos pares ele forma

---

Exercício 5.16: Prove que todo valor inteiro $n \geq 5$, em dinheiro, pode ser obtido usando somente notas de 2 ou de 5 reais.

Dica: deve mostrar a base p/ 5 e 6. Por quê?

Exercício 5.17: Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Exercício 5.18: Prove que, para todo inteiro $n \geq 3$, $n^2 - 7n + 12 \geq 0$.

Exercício 5.19: Prove que, para todo inteiro $n > 1$, $2^{n+1} < 3^n$.

Base: $n = 2 \Rightarrow 2^{n+1} = 2^3 = 8 < 9 = 3^2 = 3^n$ ✓ | Passo: Tome $k+1$.

H.I.: $2^{k+1} < 3^k$ p/ $k > 1$ | $2^{(k+1)+1} = 2^{k+1} \cdot 2 \underset{\text{pela H.I.}}{<} 3^k \cdot 2 < 3^k \cdot 3 = 3^{k+1}$ ✓

Exercício 5.20: Prove que, $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0\})\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Passo: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)}$

Base: $n = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} = \frac{n}{n+1}$ ✓ | H.I.: $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$ | H.I. $\rightarrow = \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{k}{(k+1)} = \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{1}{k+2} + \frac{k(k+2)}{k+2}\right)$

$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{\cancel{(k+1)}(k+1)}{\cancel{(k+1)}(k+2)}$ ✓

Começa 2ª ...

5.4 Usos indevidos da indução matemática

---

a)

Bases:

$n = 0 \Rightarrow F_0 = 0 < \left(\frac{13}{8}\right)^0$

$n = 1 \Rightarrow F_1 = 1 < \left(\frac{13}{8}\right)^1$

Exercício 5.23: Os *números de Fibonacci* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ são definidos pelas seguintes regras: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural n maior ou igual a 2. Prove, por indução, que

a) $(\forall n \in \mathbb{N})\, F_n < (\frac{13}{8})^n$.

b) $(\forall n \in \mathbb{N})\, S_n = F_{n+1} - 1$ onde S_n é o número de somas realizadas ao se calcular F_n.

H.I.: $F_k < \left(\frac{13}{8}\right)^k$ | Passo: $F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \underset{\text{H.I.}}{<} \left(\frac{13}{8}\right)^k + \left(\frac{13}{8}\right)^{k-1} = \left(\frac{13}{8}\right)^{k-1}\left(1 + \frac{13}{8}\right) < \left(\frac{13}{8}\right)^2 \left(\frac{13}{8}\right)^{k-1} = \left(\frac{13}{8}\right)^{k+1}$

$\frac{13}{8} \cdot \frac{13}{8} = \frac{169}{64}$

$= 1 + \frac{105}{64}$

$> 1 + \frac{13}{8}$

Exercício 5.24: Sejam α e β as duas soluções da equação $x^2 - x - 1 = 0$, com $\alpha > 0$. Prove que $F_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$, para todo n em $\mathbb{N}$.

Exercício 5.27: Seja x um número real diferente de zero, tal que $x + \frac{1}{x}$ é um número inteiro. Prove que, para todo número natural n, $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro.

Base: $n = 1 \Rightarrow x^n + 1/x^n = x + 1/x \in \mathbb{Z}$ | H.I.: $x^m + 1/x^m \in \mathbb{Z}$ p/ $1 \leq m \leq k$ |

Passo: Tome $k+1$. $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = x \cdot x^k + \frac{1}{x \cdot x^k} = \frac{x^2 \cdot x^k}{x} + \frac{1/x^k}{x}$???

Exercício 5.28: Considere a afirmação (obviamente falsa) $P(n)$: "Para todo número real $a > 0$ e todo natural n, $a^n = 1$". Encontre o erro na demonstração por indução abaixo.

Prova:

- *Base*: $P(0)$ é obviamente verdadeira uma vez que $a^0 = 1$.
- *Hipótese de indução*: Suponha que, para algum $k \geq 0$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i \leq k$. ou seja, $a^i = 1$ para todo i com $0 \leq i \leq k$.
- *Passo de indução*: Vamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é $a^{k+1} = 1$. Observe que

$$a^{k+1} = a^k \cdot a = a^k \cdot \frac{a^k}{a^{k-1}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Portanto $P(k+1)$ também é verdadeira.

Teria que mostrar a base p/ 0 e 1, já que no passo olha p/ k e k-1

Fim.