Alguns Exercícios do Capítulo 13 - Introdução à Teoria dos Grafos

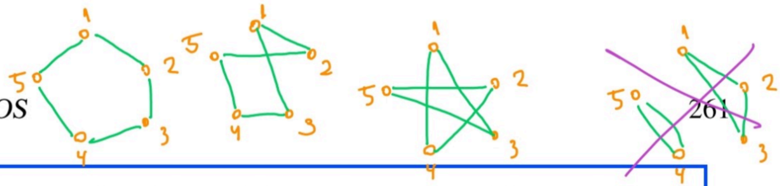
Exercício 13.4: Seja V o conjunto dos inteiros entre 2 e 30, inclusive. Qual definição de grafo (orientado ou não, simples ou não, com ou sem laços, etc.) melhor captura cada uma das seguintes informações entre cada par de números de V:

1. Um dos números é maior que o outro. orientado, simples, sem laços
2. Um dos números é o dobro do outro, menos 2. orientado, simples, sem laços
3. Um dos números é divisor do outro. orientado, simples, com laços
4. Um dos números é divisor próprio do outro. orientado, simples, sem laços
5. Os dois números possuem um fator primo comum p. não-orientado, arestas múltiplas, com laços
6. Os dois números são relativamente primos entre si. não-orientado, simples, sem laços

---

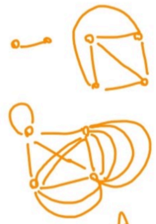
contando

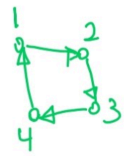
$\frac{5!}{5}\cdot\frac{1}{2} + \cancel{\binom{5}{3}\frac{3!}{3}\cdot\frac{1}{2}}$



Exercício 13.8: Desenhe todos os grafos não orientados sem arestas paralelas com vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são regulares de grau 2.

Quais faltam?





Exercício 13.9: Desenhe todos os grafos orientados sem arestas paralelas com vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ que são regulares de grau 2.

$\frac{4!}{4}$

Exercício 13.10: Se G possui vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, a sequência $(dv_1, d_{v_2}, \ldots, d_{v_n})$ é denominada *sequência de graus* de G.

1. Existe um grafo com a seguinte sequência de graus: 3,3,3,3,5,6,6,6,6? Não, Σ grau ímpar
2. Existe um grafo com a seguinte sequência de graus: 1,1,3,3,3,3,5,6,8,9? Sim
3. Existe um grafo *simples* com a sequência de graus do item 2?

↳ Não, pois todos são vizinhos do último, todos menos um são do penúltimo. Então dois vértices de grau 1 é impossível.

ou = abdcde

passeio = a α b β d γ c δ d σ e

1ª aula parou aqui

2ª aula

13.4 Percursos em grafos

Exercício 13.12: Qual é a relaçao entre $|P|$, $|Q|$, e $|P \cdot Q|$?

$|P \cdot Q| = |P| + |Q|$

Exercício 13.13: Se $P \cdot Q$ está definido e é igual a P, o que podemos dizer sobre P e Q?

Q é apenas o vértice final de P

Exercício 13.14: Se $P \cdot Q^{-1}$ está definido, o que podemos dizer sobre P e Q?

P e Q terminam no mesmo vértice

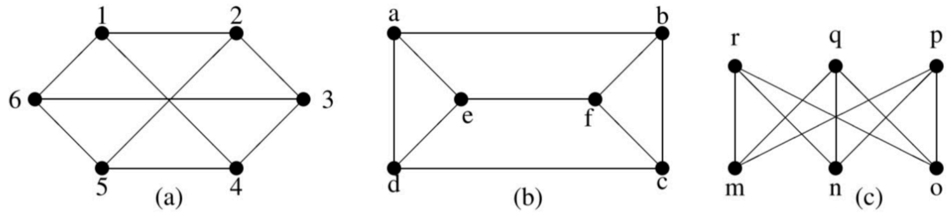
Exercício 13.15: Seja G um grafo, e sejam u, v dois vértices quaisquer de G. Prove que existe um **passeio** de u para v em G se e somente se existe um **caminho** de u para v em G.

($\Leftarrow$) Um caminho é um passeio || ($\Rightarrow$) Um passeio P que não é caminho repete vértices, formando um laço. Remova laço formando P'. Por indução, esse processo leva a um caminho

Exercício 13.16: Prove a seguinte afirmação, ou mostre um contra exemplo: Se P e Q são caminhos

---

Exercício 13.29: Os grafos abaixo são isomorfos? Relacione-os dois a dois. Demonstre que são isomorfos, se o forem; caso contrário justifique porque não o são.



Exercício 13.41: Prove que dois grafos bipartidos completos G e H são isomorfos se e somente se existirem bipartições $\mathcal{V}^- G, \mathcal{V}^+ G$ de G e $\mathcal{V}^- H, \mathcal{V}^+ H$ de H tais que $|\mathcal{V}^- G| = |\mathcal{V}^- H|$ e $|\mathcal{V}^+ G| = |\mathcal{V}^+ H|$.

Exercício 13.42: Quando é que um grafo bipartido completo é regular? Quando $n = m$

Exercício 13.43: Para que valores de n um grafo completo com n vértices tem um tour de Euler?

Exercício 13.44: Seja G um grafo conexo. Se G tem um tour de Euler então G não tem vértices de grau ímpar.

⊛ Qual é a questão?

Exercício 13.45: Seja $G = (V, E)$ um grafo simples conexo e que não é euleriano. Foram propostos os seguintes métodos para construir um grafo euleriano H que contém G como um subgrafo. Quais dos métodos descritos abaixo constroem corretamente o grafo H? Justifique sucintamente.

a) Acrescente um novo vértice, ligando-o a cada vértice de grau ímpar de G através de uma aresta.

b) Acrescente um novo vértice, ligando-o a cada vértice de G através de uma aresta.

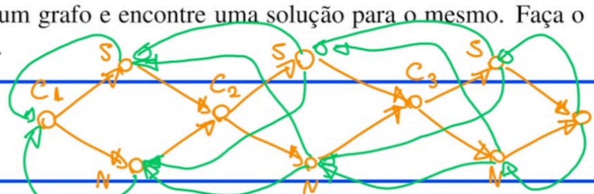
c) Escolha um vértice arbitrário de G e acrescente novas arestas ligando este vértice a todos os vértices de grau ímpar de G.

d) Duplique cada aresta de G.

e) Acrescente arestas a G até obter um grafo completo com $|V|$ vértices.

Exercício 13.46: Um cofre tem uma fechadura elétrica acionada por três chaves, cada uma das quais pode estar em duas posições indicadas por '0' e '1'. A porta abre somente se as três chaves estiverem em uma combinação secreta específica, por exemplo '011'. Um ladrão que não conhece o segredo quer tentar todas as combinações mexendo em apenas uma chave de cada vez, no menor tempo possível. Modele o problema em um grafo e encontre uma solução para o mesmo. Faça o mesmo para um cofre com quatro chaves.

???



Exercício 13.47: Um *poliedro* é um sólido geométrico limitado por polígonos planos. A todo poliedro K corresponde um grafo G tal que $\mathcal{V} G$ é o conjunto dos vértices (cantos) de K, $\mathcal{E} G$ é o conjunto das arestas (quinas) de P e as pontas de cada aresta são as mesmas em G e em K. Os *poliedros platônicos* são poliedros cujas faces, vértices, arestas e ângulos são todos iguais. Existem apenas cinco poliedros platônicos: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro, e o dodecaedro regulares. Desenhe os grafos desses poliedros e determine quais deles possuem um circuito hamiltoniano,

Exercício 13.48: Dê exemplos de:

1. Um grafo euleriano que não é hamiltoniano.
2. Um grafo hamiltoniano que não é euleriano.

Exercício 13.52: Assinale com **V** ou **F** as afirmações que são verdadeiras ou falsas respectivamente:

- todo subgrafo de um grafo planar é planar.
- todo subgrafo de um grafo não-planar é não-planar.
- todo grafo que contém um grafo planar (como subgrafo) é planar.
- todo grafo que contém um grafo não-planar (como subgrafo) é não-planar.

Exercício 13.53: Para que valores de n, K_n é planar?

Exercício 13.54: Para quais valores de r e s ($r \leq s$) o grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é planar?

Teorema 13.17: Seja G um grafo simples e Δ o maior dos graus de seus vértices. O número cromático de G é no máximo $\Delta + 1$. ↳ ainda que cada vizinho tenha uma cor distinta, sobra uma cor distinta p/ $\Delta+1$

Exercício 13.55: Qual é o número cromático do grafo ciclo com cinco vértices (C_5)? E do grafo ciclo com n vértices (C_n) em geral?

Exercício 13.56: Qual é o número cromático do grafo completo bipartido $K_{p,q}$, para $p,\ q \geq 1$?

Exercício 13.57: Seja G um grafo com pelo menos uma aresta. Prove que G é um grafo bipartido se, e somente se, o número cromático de G é dois.