PAA - Aula ~~17~~ 18
Programação Dinâmica,
Conjunto Independente de Peso Máximo em Caminhos

Vamos começar a estudar a técnica de projeto de algoritmos

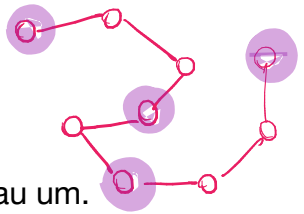
- chamada Programação Dinâmica.

Para tanto, vamos abordar um problema bastante particular e didático,

- o Conjunto Independente de Peso Máximo em Grafos Caminhos.

Entrada: um grafo caminho $G=(V,E)$ com

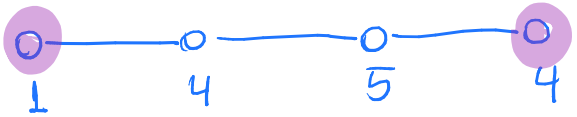
  - pesos não negativos nos vértices, $w : V \to \mathbb{R}^+$
- Um grafo caminho é um grafo conexo sem bifurcações, ou seja,
  - o grau de todos os vértices é dois,
    - exceto pelos dois vértices dos extremos que têm grau um.



Saída: um conjunto independente de peso máximo.

- Um conjunto é independente se nenhum par de vértices é adjacente,
  - i.e., se nenhum par do conjunto tem aresta em comum.

Exemplo: Caminho com quatro vértices e pesos 1, 4, 5, 4



1 + 4 = 5

Antes de projetar um algoritmo usando a nova técnica,

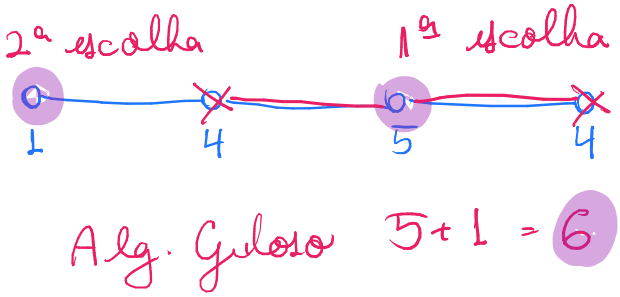
- vamos testar as técnicas que já conhecemos,
  - para entender as dificuldades do problema
  - e limitações das técnicas.

Abordagem por força bruta:

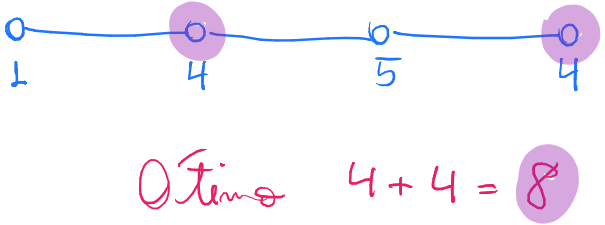
- Vamos enumerar todos os 2^n diferentes subconjuntos,
  - descartar todos os que tem dois vértices adjacentes,
  - e encontrar o de peso máximo dentre os que sobraram
- Vantagem: Esta abordagem encontra o resultado correto.
- Desvantagem: Ela leva tempo $\Omega(2^n)$

Abordagem gulosa:

- Dentre várias possíveis, uma ideia é escolher
  - sempre o vértice de maior peso para fazer parte da solução.

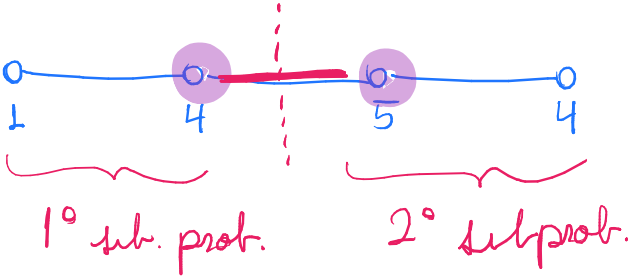


- Contra-exemplo: escolhendo o vértice de peso 5 do grafo anterior
  - ficamos impossibilitados de escolher seus vizinhos.
    - Com isso, nossa solução terá peso
- Por outro lado o ótimo teria peso



Abordagem por divisão e conquista:

- Dividir o caminho ao meio parece uma boa ideia
  - (semelhante a dividir um vetor ao meio).
- Então podemos resolver recursivamente cada subproblema.



- Contra-exemplo: no grafo anterior a solução ótima
  - do primeiro subcaminho (1,4) é 4
  - e a do segundo subcaminho (5,4) é 5
- Observe que não parece fácil combinar essas soluções,
  - já que elas têm vértices adjacentes.

Subestrutura ótima:

A parte central do projeto de algoritmos utilizando programação dinâmica
- é encontrar a subestrutura ótima das soluções do problema.

- Isso significa mostrar como uma solução ótima
  - é composta de soluções ótimas para subproblemas menores.
- A princípio isso serve para entender melhor o problema
  - e reduzir o espaço soluções de uma busca exaustiva,
    - mas o impacto no tempo de execução pode ser muito maior.

No problema do Conjunto Independente de Peso Máximo em Grafos Caminhos,
- imaginamos uma solução ótima S
  - e consideramos o último vértice v_n do grafo caminho G

Então analisamos por casos.

Caso 1) $v_n \notin S$. Sendo $G' = G \setminus \{v_n\}$ temos que S é uma solução ótima em G'

Provando por contradição: suponha que S^* é uma sol. ótima p/ G' c/ custo maior que S. Como S^* é um subconj. dos vértices de G', também é subconjunto de G. Portanto, S^* é uma solução de G c/ custo maior que S (contradição)

Caso 2) $v_n \in S$. Neste caso v_{n-1} não pode estar em S

- Seja $G'' = G \setminus \{v_n, v_{n-1}\}$ e $S'' = S \setminus \{v_n\}$
  - Temos que S'' é uma solução ótima em G''

Provando por contradição: suponha que S^* é solução de G'' c/ custo maior que S''. Tome $S^* \cup \{v_n\}$ e note que esse conj. é uma solução p/ G. Como $w(S^*) > w(S'') = w(S) - w(v_n)$ temos que $w(S^* \cup \{v_n\}) = w(S^*) + w(v_n) > w(S) - w(v_n) + w(v_n) = w(S)$ (contradição)

De posse da subestrutura ótima, conseguimos descrever uma solução ótima para G_2

- como a melhor entre uma solução ótima em $G_1' = G_2 \setminus \{v_n\}$
  - e $\{v_n\} \cup$ uma solução ótima em $G_1'' = G_2 \setminus \{v_n, v_{n-1}\}$
- Não sabemos qual dos dois casos se aplica,
  - mas isso nos sugere o seguinte algoritmo recursivo.

```
conjIndRec(G=(V,E), w):
    se |V| = 1: devolva w(v_1)
    se |V| = 2: devolva max{w(v_1), w(v_2)}
    S' = conjIndRec(G' = G \ {v_n})
    S'' = conjIndRec(G'' = G \ {v_n, v_{n-1}})
    devolva max{S', S'' + w(v_n)}
```

Embora correto, esse algoritmo leva tempo exponencial no tamanho da entrada.

- Quiz: Tentem escrever a recorrência de tempo do mesmo
  - e resolvê-la usando o método da substituição.
- Dica: podem simplificar a recorrência, já que basta um limitante inferior
  - para mostrar que o algoritmo leva tempo exponencial.
- O tempo deste algoritmo é "parecido" com os números de Fibonacci.

Algoritmo de programação dinâmica:

Da subestrutura ótima temos que uma solução ótima para G é a melhor entre:

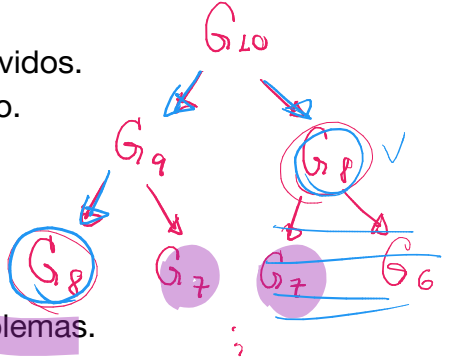
- uma solução ótima em G' = $G \setminus \{v_n\}$
- $\{v_n\} \cup$ uma solução ótima em G" = $G \setminus \{v_n, v_{n-1}\}$

Dessa relação segue a recorrência: $A[i] = \max\{A[i-1], A[i-2] + w(v_i)\}$

- sendo $A[i]$ o valor do ótimo para o caminho com os i primeiros vértices.

Observem o padrão de formação dos subproblemas.

- Apenas vértices do extremo direito do caminho são removidos.
  - Assim, cada subproblema é um prefixo do caminho.
- Como o caminho original tem n vértices,
  - temos $\Theta(n)$ diferentes subproblemas.



De fato, o algoritmo recursivo gasta tempo exponencial

- apenas por ficar recalculando os mesmos subproblemas.

- Podemos torná-lo polinomial, se guardarmos numa tabela
  - o valor de um subproblema na primeira vez que o calcularmos
  - e verificarmos essa tabela antes de recalcularmos um subproblema.
- Essa técnica é conhecida como memorização (memoization)
  - e tem uma relação próxima com programação dinâmica.

Vamos finalmente construir nosso algoritmo iterativo de programação dinâmica.

- Para tanto vamos preencher o vetor A[] de baixo para cima,
  - seguindo a regra da recorrência $A[i] = \max\{A[i-1], A[i-2] + w(v_i)\}$

⇒ No pseudocódigo supomos que o vetor $A[0]$ vai de 0 até n, e os vértices de 1 até n

```
conjInd(G = (V,E), w):
    A[0] = 0
    A[1] = w(v_1)
    para i = 2 até n:
        A[i] = max{A[i-1], A[i-2] + w(v_i)}
    devolva A[n]
```

O(n)

Corretude: Segue da subestrutura ótima e pode ser provada por indução.

Eficiência: $O(n)$, pois o algoritmo só tem um laço principal

- e realiza um número de operações constante dentro deste.

Reconstruindo a solução:

Embora nosso algoritmo encontre o valor da solução ótima,

- ele não obtém a solução em si.

- Uma opção é modificar o algoritmo para que
  - ele armazene a solução dos subproblemas,
  - ao menos daqueles que ainda podem fazer parte da solução ótima.
- Mas isso não costuma ser eficiente em questão de memória,
  - especialmente em algoritmos de maior dimensão
    - e com recorrências complexas.

Por isso, em geral, o mais eficiente é reconstruir a solução

- fazendo engenharia reversa no vetor de soluções.

- Para tanto vamos olhar novamente para nossa recorrência:
  - $A[i] = \max\{A[i-1], A[i-2] + w(v_i)\}$
- e observar que um vértice v_i está na solução para G_i se, e somente se,
  - $w(v_i)$ + custo da solução para $G_{i-2} \geq$ custo da solução para G_{i-1}
- sendo G_i o prefixo de G com os primeiros i vértices.

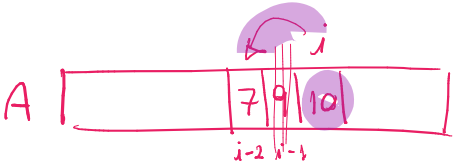
Assim, vamos percorrer o vetor A[] do fim para o início e, em cada posição,

- verificamos qual foi a escolha que o algoritmo fez (usando a recorrência).
  - Se for o caso, adicionamos o vértice corrente à solução
  - e avançamos no vetor para a posição adequada.
- Para ficar mais claro, considere os seguintes exemplos e pseudocódigo
  - supondo que o vetor A[] foi preenchido pelo algoritmo ganancioso.

```
rec Sol (G, w, A):
    S = ∅
    i = n
    enquanto i ≥ 2:
        se A[i-1] ≥ A[i-2] + w(v_i):
            i = i-1
        senão:
            S = S ∪ {v_i}
            i = i-2
    se i == 1 : S = S ∪ {v_i}
    devolva S
```

O(n)

Eficiência: $O(n)$



$7 + 3 = 10 > 9 \Rightarrow v_i \in S$

$i = i-2$

$5 + 3 = 8 < 10 \Rightarrow v_i \notin S$

$i = i-1$