Programação com retrocesso (backtracking)

Mário César San Felice

Aula 26 de Algoritmos e Estruturas de Dados 1
DC - UFSCar
felice@ufscar.br

21 de março de 2023

Introdução

Dado um problema computacional combinatório

Podemos resolvê-lo usando enumeração por força bruta

Ou seja, testar todas as soluções candidatas

Em geral isso é pouco eficiente, pois:

- Verificar se uma solução é viável pode ser custoso
- O número de soluções candidatas costuma ser muito grande

Técnica: Backtracking

Programação com retrocesso (backtracking) é um método mais eficiente para fazer busca exaustiva

Aplicável quando as soluções candidatas podem ser construídas incrementalmente

Nele, múltiplas soluções podem ser eliminadas sem serem explicitamente examinadas

Ideia central é retroceder quando detectar que a solução candidata é inviável

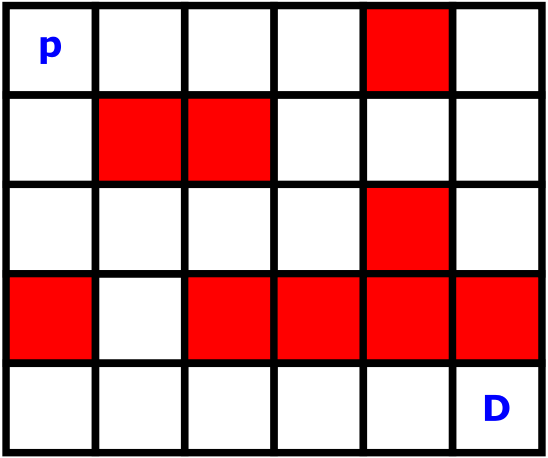
Algoritmo: Backtracking

Algoritmos com backtracking em geral utilizam *recursão*

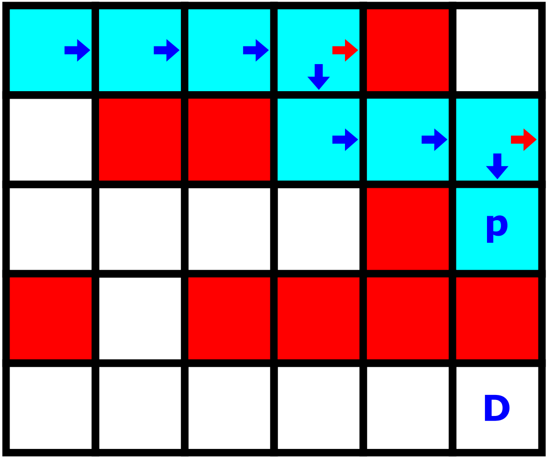
Pois esta facilita o mecanismo de retrocesso

```
backtrackingRec(solParcial p):
    se p é válida:
        se p é solucão:
            imprima p
        enquanto puder estender p para algum s:
            backtrackingRec(s)
```

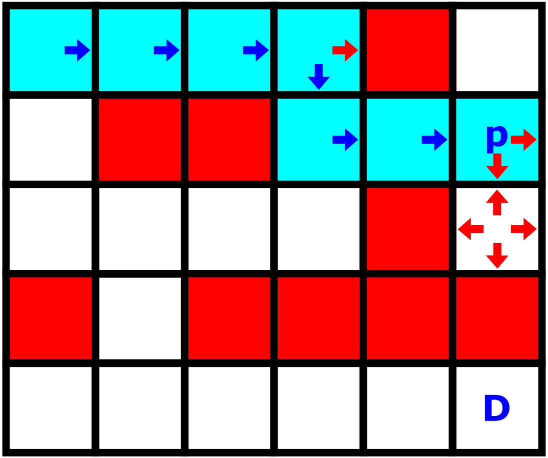
Exemplo: Labirinto



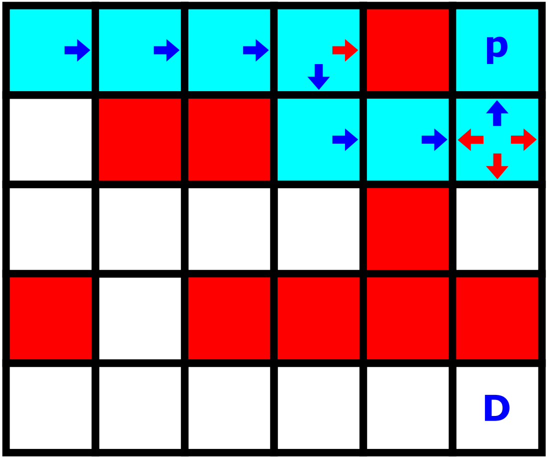
Exemplo: Labirinto



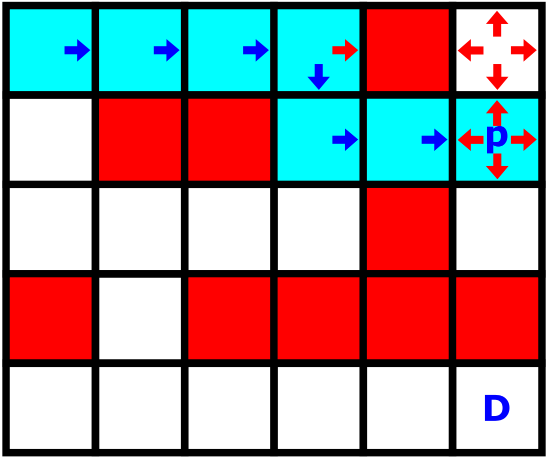
Exemplo: Labirinto



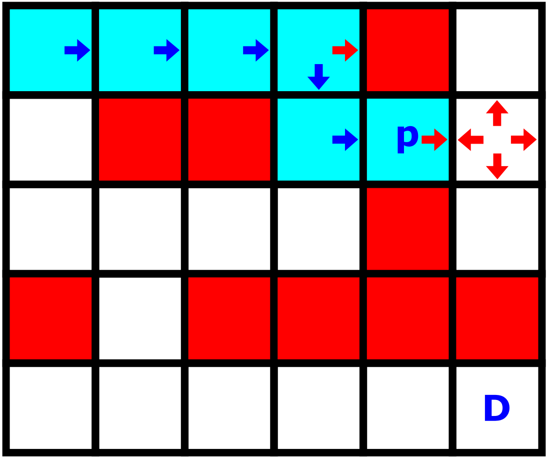
Exemplo: Labirinto



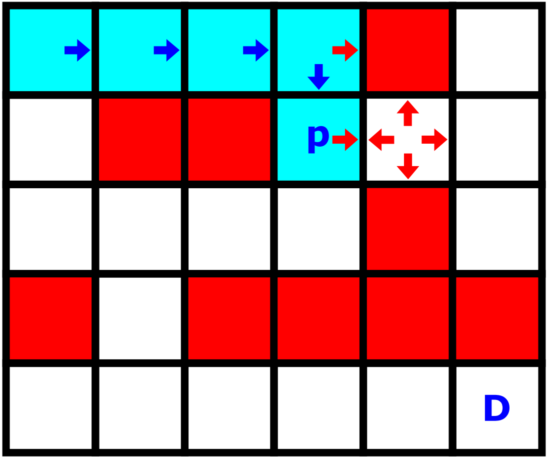
Exemplo: Labirinto



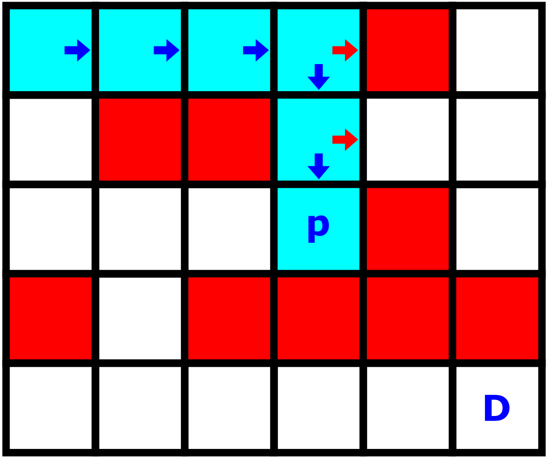
Exemplo: Labirinto



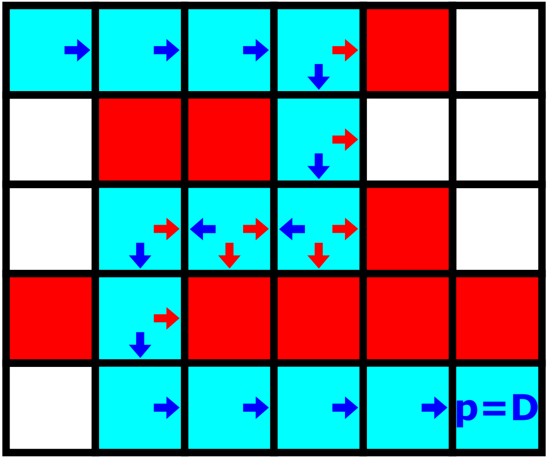
Exemplo: Labirinto



Exemplo: Labirinto



Exemplo: Labirinto



Algoritmos: Labirinto

```
#define NUM_MOV 4

int desLin[NUM_MOV] = {0, 1, 0, -1};
int desCol[NUM_MOV] = {1, 0, -1, 0};

typedef struct labirinto
{
    int numLins;
    int numCols;
    int **pos;
} * Labirinto;

void imprimeLabirinto(Labirinto lab);
```

Algoritmos: Labirinto

```
int posValida(Labirinto lab, int lin, int col)
{
    if (lin >= 0 && lin < lab->numLins &&
        col >= 0 && col < lab->numCols)
        if (lab->pos[lin][col] == 0)
            return 1;
    return 0;
}

int resolveLabirinto(Labirinto lab)
{
    return resolveLabirintoR(lab, 0, 0,
        lab->numLins - 1, lab->numCols - 1);
}
```

Algoritmos: Labirinto

```
int resolveLabirintoR(Labirinto lab, int lin, int col,
                      int linDest, int colDest) {
    int achou = 0, cont = 0;
    if (posValida(lab, lin, col)) {
        lab->pos[lin][col] = 1;
        if (lin == linDest && col == colDest) {
            imprimeLabirinto(lab);
            achou = 1; }
        while (achou == 0 && cont < NUM_MOV) {
            achou = resolveLabirintoR(lab,
                lin + desLin[cont], col + desCol[cont],
                linDest, colDest);
            cont++; }
        lab->pos[lin][col] = 0; }
    return achou; }
```

Algoritmos: Labirinto

Note que, a primeira solução encontrada nem sempre é a melhor.

Exercício: Modificar o algoritmo anterior para encontrar todas as soluções possíveis.

Desafio: Modificar o algoritmo anterior para resolver o problema dos movimentos dos cavalos.

Neste problema deseja-se passar uma única vez por cada casa de um tabuleiro, se movimentando em L com um cavalo no xadrez.

Dica: É preciso modificar o padrão dos movimentos e o critério de sucesso.

Observações: Backtracking

Numa enumeração por força bruta pura,

- um algoritmo poderia considerar todas as concatenações possíveis de posições do labirinto,
- e descartar cada uma que não corresponda a um caminho válido da origem ao destino.

Isso é muito ineficiente, pois só o número de concatenações distintas já corresponde a um fatorial do tamanho dos caminhos.

Observações: Backtracking

Backtracking é mais eficiente que enumeração por força bruta, pois:

- sempre parte de soluções parciais viáveis e
- quando detecta que uma solução parcial é inviável,
- essa parcial é descartada, eliminando assim diversas soluções candidatas inviáveis que derivam da parcial.

Ainda assim, como o número de soluções candidatas costuma ser muito grande, para muitos problemas backtracking ainda é ineficiente, particularmente para instâncias grandes.

No caso do labirinto, o número de soluções pode crescer exponencialmente no número de posições. Aproximadamente $\mathrm{O}(3^{(nm)})$, sendo n o número de linhas e m o número de colunas.

Observações: Backtracking

É importante destacar que, o caminho que as soluções parciais percorrem

- nem sempre corresponde a um caminho no problema sendo resolvido,
- mas é um caminho lógico na árvore de decisão sendo percorrida.

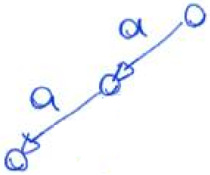
Nosso próximo exemplo deixa isso mais claro.

Exemplo: Quadrado Latino

b			**d**
	d	**b**	
	c	**d**	
d			**c**

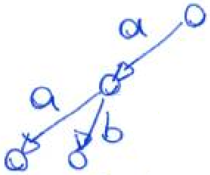
Exemplo: Quadrado Latino

b	a	a	d
	d	b	
	c	d	
d			c



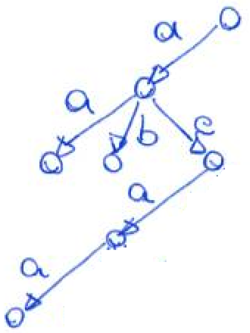
Exemplo: Quadrado Latino

b	a	b	d
	d	b	
	c	d	
d			c



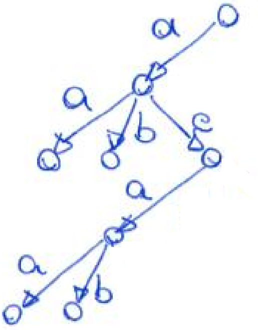
Exemplo: Quadrado Latino

b	a	c	d
a	d	b	a
	c	d	
d			c



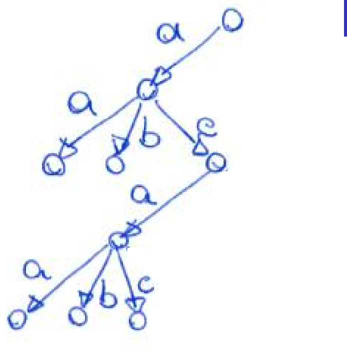
Exemplo: Quadrado Latino

b	a	c	d
a	d	b	b
	c	d	
d			c



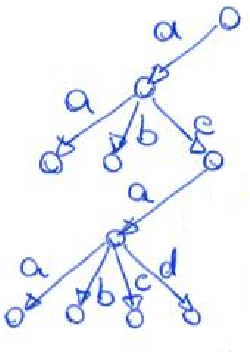
Exemplo: Quadrado Latino

b	**a**	**c**	**d**
a	**d**	**b**	**c**
	c	**d**	
d			**c**



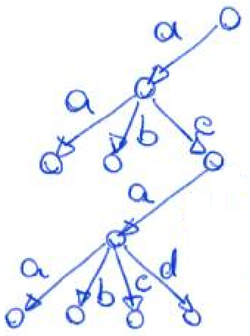
Exemplo: Quadrado Latino

b	a	c	d
a	d	b	d
	c	d	
d			c



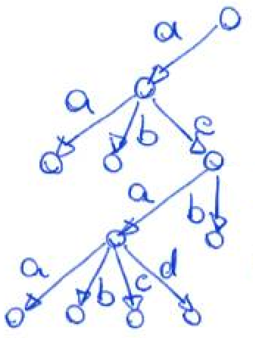
Exemplo: Quadrado Latino

b	a	c	d
a	d	b	
	c	d	
d			c



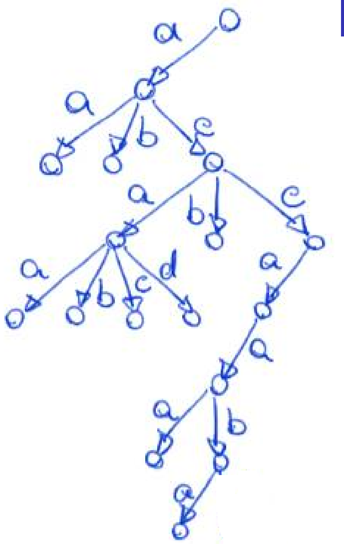
Exemplo: Quadrado Latino

b	a	c	d
b	d	b	
	c	d	
d			c



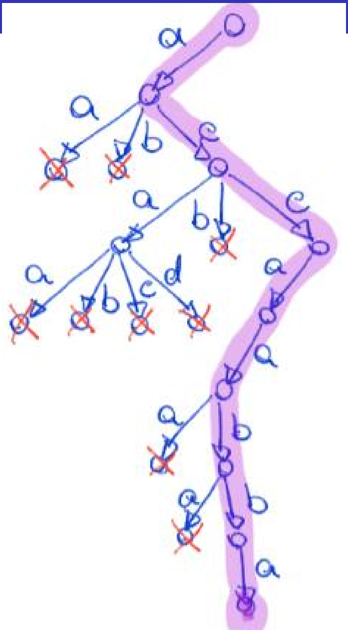
Exemplo: Quadrado Latino

b	a	c	d
c	d	b	a
a	c	d	b
d	a		c



Exemplo: Quadrado Latino

b	**a**	**c**	**d**
c	**d**	**b**	**a**
a	**c**	**d**	**b**
d	**b**	**a**	**c**



Algoritmos: Quadrado Latino

```
typedef struct matriz
{
    int numLins;
    int numCols;
    int **pos;
} * Matriz;

// funções auxiliares
void imprimeQLatino(Matriz m);
int qLatinoResolvido(Matriz m);
int proxPosLin(Matriz m, int lin, int col);
int proxPosCol(Matriz m, int lin, int col);
```

Algoritmos: Quadrado Latino

```
int atribValida(Matriz m, int lin, int col, int letra)
{
    for (int i = 0; i < m->numLins; i++)
        if (m->pos[i][col] == letra ||
            m->pos[lin][i] == letra)
            return 0;
    return 1;
}

// função inicial que chama a principal
int resolveQLatino(Matriz m);
```

Algoritmos: Quadrado Latino

```
int qLatR(Matriz m, int lin, int col, int letra) {
    int achou = 0, cont = 1;
    if (atribValida(m, lin, col, letra)) {
        m->pos[lin][col] = letra;
        if (qLatinoResolvido(m)) {
            imprimeQLatino(m);
            achou = 1; }
        while (achou == 0 && cont <= m->numLins) {
            achou = qLatR(m,
                proxPosLin(m, lin, col),
                proxPosCol(m, lin, col), cont);
            cont++; }
        m->pos[lin][col] = 0; }
    return achou; }
```

Algoritmos: Quadrado Latino

Eficiência: o número de chamadas da função recursiva qLatR pode chegar a $O(n^{(n^2)})$, sendo

- o n da base o número de valores testados por posição vazia
- e o (n^2) no expoente o número de posições vazias possíveis.

Na prática, espera-se que as podas na árvore de decisão reduzam significativamente esse valor.

Exercício: Implementar as funções auxiliares e a função inicial do algoritmo anterior.

Desafio: Modificar o algoritmo anterior para resolver o Sudoku. Qual função deve ser modificada?

Curiosidades: Backtracking

Backtracking é a base do branch-and-bound, uma técnica importante para resolver problemas de otimização discreta.

Backtracking pode ser utilizada para resolver problemas de satisfação de restrições e puzzles, como:

- Problema das 8 rainhas
- Palavras-cruzadas
- Criptoaritmética