Filas de prioridade, implementações básica e com heap

Filas de prioridade são um tipo abstrato de dados
- em que cada elemento está associado a um valor,
    - que indica sua prioridade,
- e que generaliza tanto filas quanto pilhas.

Uma fila de prioridades suporta operações de:
- inserção de um elemento com um certo valor de prioridade,
- edição da prioridade de um elemento (operação menos comum),
- remoção do elemento com maior (ou menor) prioridade.
    - Esta operação não atende maior e menor simultaneamente.
        - Por isso temos filas de prioridade de máximo
            - e filas de prioridade de mínimo.

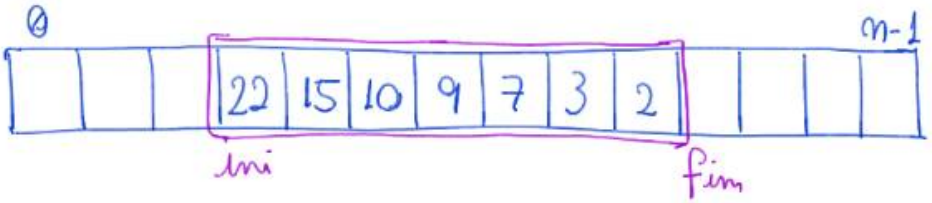
Quiz1: Conhecendo a definição e operações suportadas por uma fila de prioridade,
- como definir as prioridades dos elementos,
    - para que uma fila de prioridade se comporte como uma fila?
- E para que ela se comporte como uma pilha?

Para simplificar, ao longo desta aula vamos supor que
    - o valor de cada elemento corresponde a sua prioridade,
- e vamos focar na versão de **máximo** da fila de prioridade.
    - Destacamos que é simples transformar a implementação
        - de uma fila de prioridade de máximo
            - em uma fila de prioridade de mínimo.
- Quiz2: Como usar uma fila de prioridade de máximo para
    - obter o comportamento de uma fila de mínimo?

Implementação básica de uma fila de prioridade

Esta implementação utiliza ideias da nossa implementação de fila em vetor.

Exemplo: elementos em ordem decrescente de prioridade em v[ini .. fim - 1].



Tamanho
- tam = fim - ini;

Remoção do elemento máximo

```
x = q[ini++];
```

- Leva tempo constante, i.e., O(1).

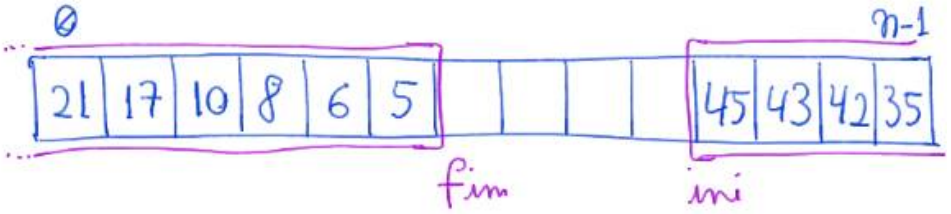
Inserção de um elemento x

```
for (int i = fim - 1; i >= ini && v[i] < x; i--)
    v[i + 1] = v[i];
v[i + 1] = x;
fim++;
```

- Ela leva tempo proporcional a tam no pior caso, i.e., O(tam).

Implementação básica de uma fila de prioridade de máximo

- baseada na implementação de fila em vetor circular



Remoção e, principalmente, inserção passam a ter mais detalhes,

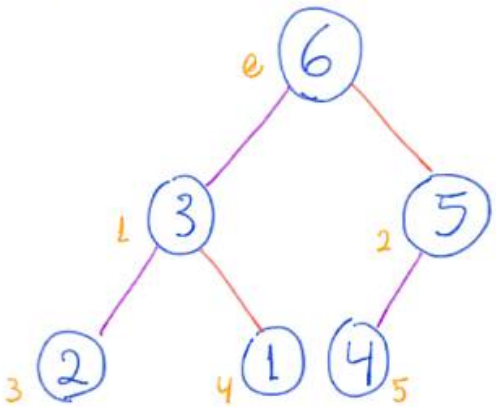
- mas a eficiência da primeira continua constante
  - e da segunda continua proporcional ao tamanho, i.e, O(tam).
- Quiz3/Desafio: implementar uma fila de prioridades em vetor circular.

Será que podemos fazer melhor?

Implementação de uma fila de prioridade usando Heap

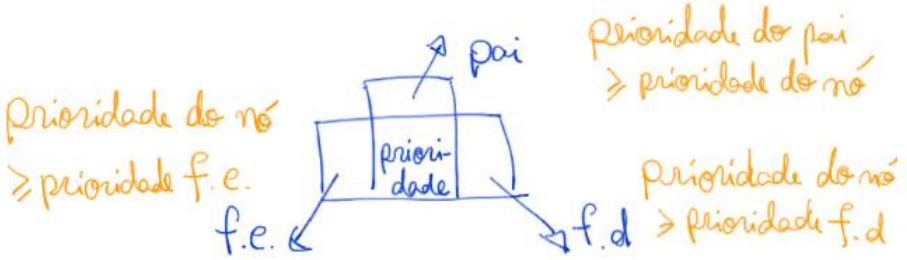
Heap é uma estrutura de dados eficiente para implementar Filas de Prioridades.

- Exemplo de um heap de máximo:



Um heap de máximo é

  - uma árvore binária completa ou quase-completa,
- cujos nós respeitam a propriedade do heap de máximo, i.e.,
  - o valor da prioridade de um nó é >= que a prioridade de seus filhos.

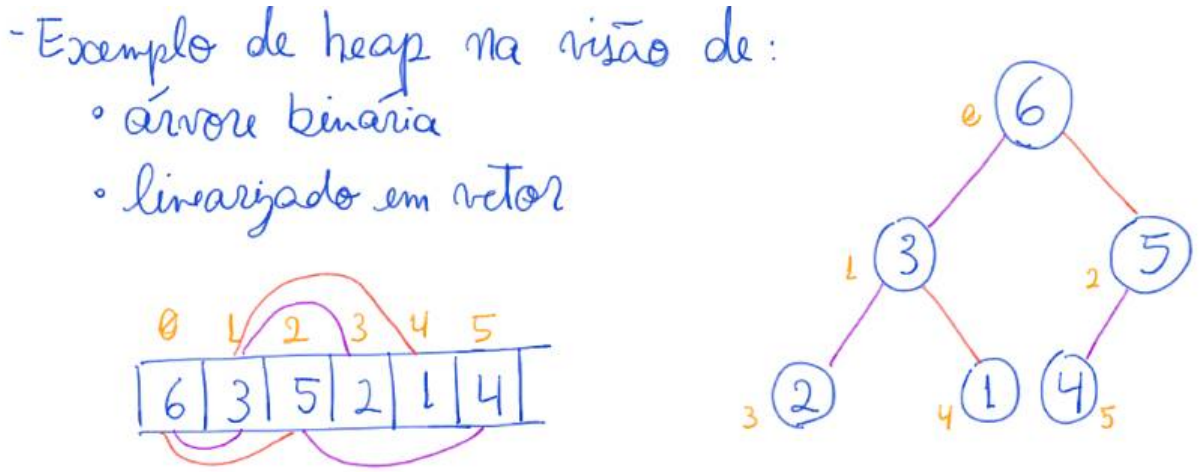


- Note que a propriedade do heap não nos permite comparar
    - os valores de um filho esquerdo e de um filho direito.

Numa árvore binária completa
    - cada nível p tem 2^p nós.
- Lembrando que a raiz fica no nível 0
    - e que o nível aumenta cada vez que
        - vamos de um nó para seu filho esquerdo ou direito.

Numa árvore binária quase completa
- cada nível p tem 2^p nós,
    - com a possível exceção do último nível.
- Se for esse o caso, no último nível as posições dos nós
    - são preenchidas da esquerda para a direita, sem espaços vazios.

O fato do heap ser uma árvore binária quase completa,
- permite que ele seja implementado em um vetor,
    - como mostra o seguinte exemplo:



- Em tal implementação o vetor é preenchido da esquerda para a direita,
    - e os nós da árvore são contados/numerados de cima para baixo
        - e, em cada nível, também da esquerda para a direita.
- Desse modo, o número associado a cada nó da árvore
    - corresponde a seu índice no vetor.

De modo geral, implementamos um heap com m elementos
    - em um vetor v que começa em 0 e vai até m - 1.
- Para tanto, dado um elemento na posição i,
    - é essencial saber quem é pai, filho esquerdo e filho direito de i.
- Para tanto, podemos usar as seguintes fórmulas:

```c
#define FILHO_ESQ(i) (2 * i + 1)
#define FILHO_DIR(i) (2 * i + 2)
#define PAI(i) ((i - 1) / 2)
```

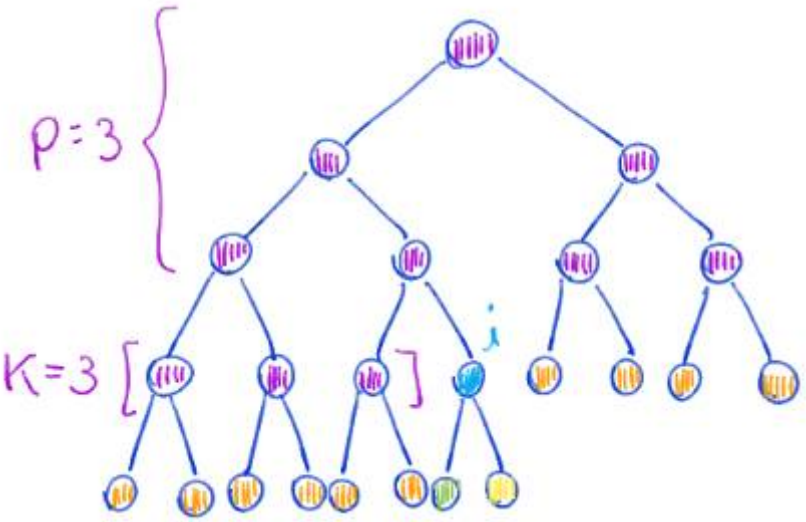
- Verifique que elas funcionam corretamente no heap do exemplo anterior.

Observe que, o nó raiz, que não tem pai, fica na posição 0.

- Além disso, se FILHO_ESQ(i) ou FILHO_DIR(i) forem >= m,
    - então i não tem filho esquerdo ou direito, respectivamente.
- Note que os nós da segunda metade do vetor não tem filhos, já que
    - para i >= m / 2 temos FILHO_ESQ(i) = 2 * i + 1 >= 2 m / 2 + 1 >= m.
- De fato, em um heap (e em toda árvore binária quase completa),
    - o número de folhas (nós sem filhos) é pelo menos metade do total.

Para obter uma intuição do porque o índice de um nó i

- é aproximadamente metade do índice de seus filhos, observe que,
    - numa árvore binária quase completa o número de nós antes de i é
        - aproximadamente igual ao número de nós entre i e seus filhos.
- Para uma explicação mais precisa, considere a análise do seguinte exemplo:



elementos antes de i

$10 = 7+3 = (2^3-1)+3 = (2^p-1)+K$

$i = (2^p-1)+K$ (índices começam em 0)

elementos depois de i

$10 = 4+6$

$= (2^3-3-1)+2.3$

$= (2^p-K-1)+2K = 2^p+K-1$

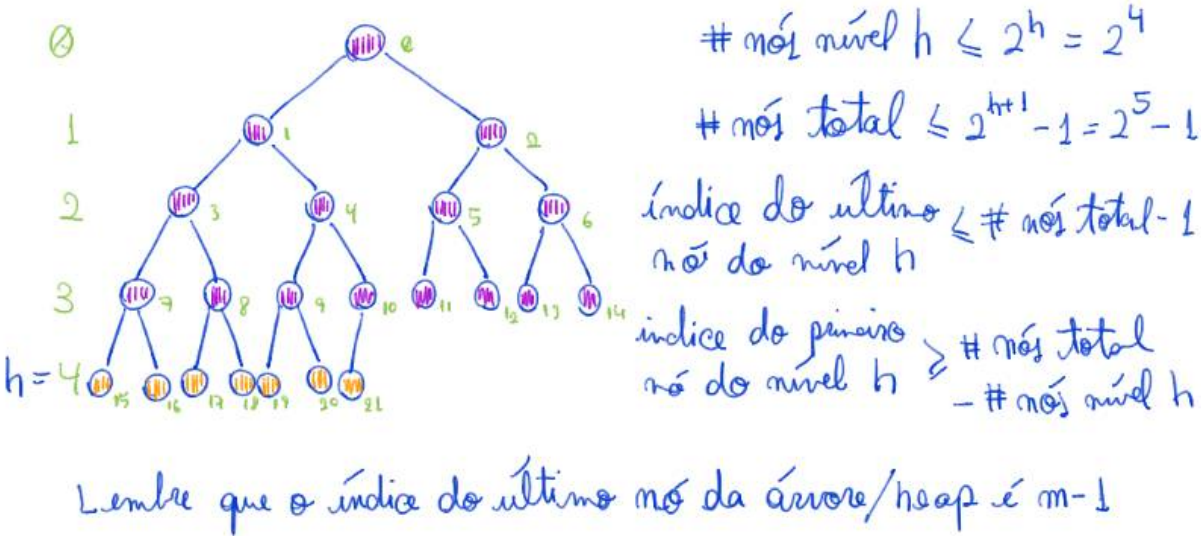
$fe(i) = (2^p+K-1)+1+(2^p+K-1)$

$= 2i+1$

Queremos descobrir a altura (h) de uma árvore binária quase completa com m nós,

- ou, de modo equivalente,
    - o número de níveis que um heap com m elementos possui,
- pois isso será relevante para entender
    - a eficiência de operações que manipulam um heap.

Para tanto, vamos considerar algumas questões:

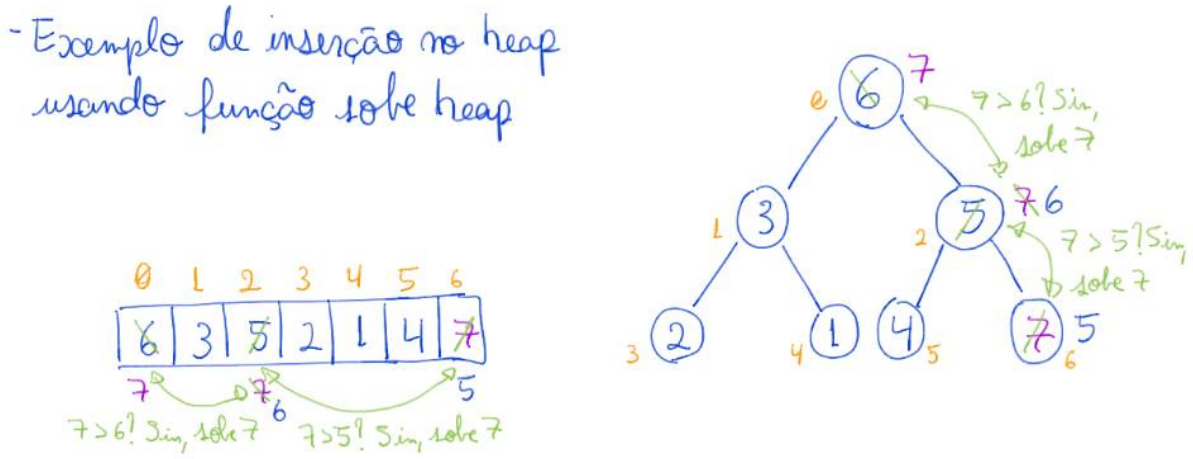


- Quantos nós cabem no nível h de uma árvore binária completa?
    - Já vimos que são 2^h nós.
- Quantos nós cabem numa árvore binária completa com h níveis?
    - Também já vimos que são 2^(h + 1) - 1 nós.
        - Então, o número de nós m <= 2^(h + 1) - 1.
- E quantos nós cabem nos primeiros h níveis dessa árvore,
        - i.e., nos níveis entre 0 e h - 1?
    - São 2^(h - 1 + 1) - 1 = 2^h - 1 nós.
        - Assim, o número de nós m >= (2^h - 1) + 1 = 2^h.
- Portanto,
        - 2^h <= m <= 2^(h + 1) - 1
        - 2^h <= m < 2^(h + 1)
        - h <= lg(m) < h + 1
- Ou seja, o maior nível de um heap com m elementos é **piso(lg m)**.

Agora vamos estudar as duas funções mais importantes para manutenção do heap.

Sobe Heap

- Veremos esta função aplicada à inserção de um novo elemento no heap,
  - que é seu uso mais comum.
- Também a utilizaremos para construir um heap a partir de um vetor.



Código da sobeHeap:

```
// sobe o elemento em v[pos] até restaurar a propriedade do heap
void sobeHeap(int v[], int pos) {
    int corr = pos;
    while (corr > 0 && v[PAI(corr)] < v[corr]) {
        troca(&v[corr], &v[PAI(corr)]);
        corr = PAI(corr);
    }
}
```

- Exemplo de uso da sobeHeap:

```
    printf("Testando sobeHeap com elemento da ultima posicao\n");
    sobeHeap(v, m - 1);
```

Corretude e invariante da sobeHeap:

- O invariante principal que vale no início de cada iteração é
  - todo elemento em v[0 .. pos] respeita a propriedade do heap,
    - exceto, possivelmente, pelo elemento corr.
  - Isto é, v[i] <= v[PAI(i)] = v[(i - 1) / 2] vale para todo i != corr.

Eficiência da sobeHeap: número de operações é O(log pos) = O(log m),

- pois no início corr = pos e em cada iteração corr é dividido por 2.

A seguir apresentamos o código da função **insereHeap**, que

- implementa uma das operações fundamentais da fila de prioridade.

- Esta função coloca o novo elemento na próxima posição disponível no vetor,
  - e invoca sobeHeap para restabelecer a propriedade do Heap.
    - Por isso, sua eficiência é O(lg m).

```
int insereHeap(int v[], int m, int x) {
    v[m] = x;
    sobeHeap(v, m);
    return m + 1;
}
```

- Exemplos de uso da insereHeap:

```
    printf("Inserindo novo elemento no max heap\n");
    m = insereHeap(v, m, 999);

    printf("Criando novo max heap usando insereHeap - ordem
direta\n");
    m = 0;
    for (i = 0; i < n; i++)
        m = insereHeap(v, m, i);

    printf("Criando novo max heap usando insereHeap - ordem
inversa\n");
    m = 0;
    for (i = 0; i < n; i++)
        m = insereHeap(v, m, n - i - 1);
```

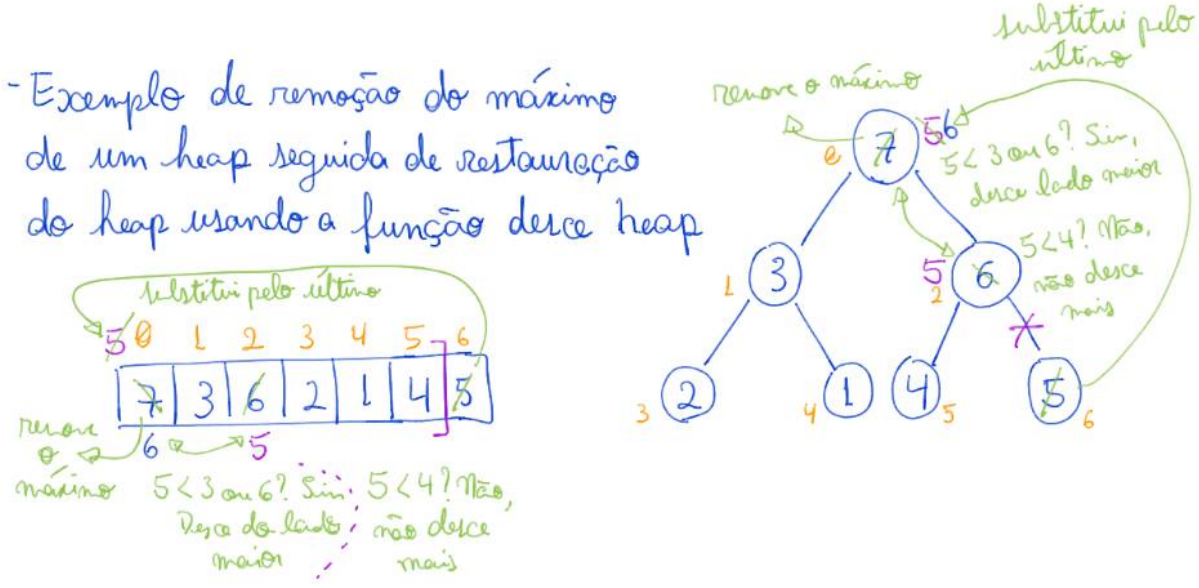
Uso da sobeHeap para reorganizar um vetor transformando-o em um Heap:

```
    printf("Criando um max heap mandando todos subirem da esquerda
pra direita\n");
    for (i = 1; i < m; i++)
        sobeHeap(v, i);
```

- Quiz4: Qual a eficiência deste algoritmo?
  - O(m lg m), pois invoca sobeHeap m vezes.

Desce Heap

- Veremos esta função aplicada à remoção de um elemento do heap,
  - que é seu uso mais comum.
- Também a utilizaremos para construir um heap a partir de um vetor.



Código da desceHeap:

```c
// desce o elemento em v[pos] até restaurar a propriedade do heap
void desceHeap(int v[], int m, int pos) {
    int corr = pos, filho;
    while (FILHO_ESQ(corr) < m && (v[FILHO_ESQ(corr)] > v[corr]
      || (FILHO_DIR(corr) < m && v[FILHO_DIR(corr)] > v[corr])))
    {
        filho = FILHO_ESQ(corr);
        if (FILHO_DIR(corr) < m && v[FILHO_DIR(corr)] > v[filho])
            filho = FILHO_DIR(corr);
        troca(&v[corr], &v[filho]);
        corr = filho;
    }
}
```

- Exemplo de uso da desceHeap:

```c
    printf("Testando desceHeap com elemento da primeira posicao\n");
    v[0] = 0;
    desceHeap(v, m, 0);
```

Corretude e invariante da desceHeap:

- O invariante principal que vale no início de cada iteração é
  - todo elemento em v[0 .. m - 1] respeita a propriedade do heap,
    - exceto, possivelmente, pelo elemento corr.
  - Isto é, v[i] >= v[FILHO_ESQ(i)] = v[2 * i + 1]
    - e v[i] >= v[FILHO_DIR(i)] = v[2 * i + 2] vale para todo i != corr.

Eficiência da desceHeap: número de operações é O(lg m),

- pois em cada iteração descemos um nível na árvore do heap
    - e o maior nível é piso(lg m).

A seguir apresentamos o código da função **removeHeap**, que

- implementa uma das operações fundamentais da fila de prioridade.
- Esta função remove e devolve o elemento máximo,
    - que está na primeira posição do vetor.
- Para ocupar essa posição vaga,
    - ela move o último elemento do vetor para a primeira posição.
- Então, ela invoca desceHeap para restabelecer a propriedade do Heap.
    - Por isso, sua eficiência é O(lg m).

```
int removeHeap(int v[], int m, int *px) {
    *px = v[0];
    troca(&v[0], &v[m - 1]);
    desceHeap(v, m, 0);
    return m - 1;
}
```

- Exemplo de uso do removeHeap:

```
    printf("Removendo o maior elemento do vetor usando
removeHeap\n");
    m = removeHeap(v, m, &x);
```

Curiosidade: É possível usar a função desceHeap para reorganizar um vetor

- de modo a transformá-lo em um heap.
- De fato, essa implementação é particularmente eficiente.
    - Veremos como ela funciona numa próxima aula.

Heaps são estruturas de dados muito eficientes

- para implementar filas de prioridade.
- Por isso, sempre que estiverem resolvendo um problema
    - e perceberem que seu algoritmo busca repetidamente
        - pelo maior (ou menor) elemento de um conjunto,
    - devem desconfiar que um heap tornará seu algoritmo mais rápido.

Quiz5: Como alterar os códigos para transformar

- um heap de máximo em um heap de mínimo?

Quiz6: Considere que uma operação de edição alterou a prioridade

- de um elemento i de um Heap, alocado em um vetor v[0 .. m - 1].
- Podemos usar as funções sobeHeap e desceHeap
    - para restaurar a propriedade do Heap.
- Supondo que a edição reduziu a prioridade de v[i],
    - qual função usar e quais os parâmetros da chamada?
- Responda a mesma questão,
    - no caso da edição ter aumentado a prioridade de v[i].