Algoritmos e Estruturas de Dados 1 (AED1)

Recursão, máximo divisor comum

"Talvez o mais importante princípio do bom projetista de algoritmos seja se recusar a estar satisfeito" - Aho, Hopcroft e Ullman, the design and analysis of computer algorithms, 1974.

Máximo divisor comum

Definição dos conceitos de divisor e múltiplo:

- Considerando números inteiros d, m e k,
  - podemos escrever m = k * d + m%d.
- Dizemos que "d divide m" se existe k tal que
  - m = k * d, ou seja, m%d = 0.
- A notação matemática para "d divide m" é d | m.
- Se d | m então dizemos que m é múltiplo de d.
- Se d | m e d > 0 então dizemos que d é um divisor de m.

Divisores comuns:

- Se d | m e d | n então d é um divisor comum de m e n.
- Exemplo:
  - Divisores de 20 são: 1, 2, 4, 5, 10 e 20.
  - Divisores de 12 são: 1, 2, 3, 4, 6 e 12.
  - Portanto, divisores comuns de 20 e 12 são 1, 2 e 4.

Máximo divisor comum:

- Denotado por mdc(m, n),
  - corresponde ao maior divisor comum de m e n.
- Exemplos:
  - mdc(20, 12) = 4.
  - mdc(514229, 317811) = 1.
  - mdc(85, 34) = 17.

Problema:

- Dados dois números inteiros não-negativos m e n,
  - encontrar o máximo divisor comum deles,
    - i.e., mdc(m, n).

Ideia básica:

- Como o divisor de um número deve ser menor que este número,
  - podemos testar todos os números entre 1 e min(m, n).
- Como queremos o maior dentre todos os divisores,
  - podemos começar em min(m, n) e ir diminuindo
    - até encontrar o primeiro divisor comum.

Algoritmo iterativo simples:

```c
#define min(m, n) (m < n ? m : n)

int mdc(int m, int n)
{
   int d = min(m, n);
   while (m % d != 0 || n % d != 0)
       d--;
   return d;
}
```

Corretude e invariante:

- No início de cada iteração, para todo valor t > d,
  - temos m % t != 0 ou n % t != 0,
    - ou seja, t não é divisor comum de m e n.
- Demonstração
  - O invariante vale no início, pois antes da primeira iteração
    - d = min(m, n) e um divisor de um número
      - é sempre menor ou igual ao número.
  - Supondo que o invariante valha no início de uma iteração qualquer,
    - podemos verificar que ele vale no início da próxima.
  - Pelo invariante, t não é divisor comum de m e n para t > d.
    - Como o algoritmo entrou na iteração atual,
      - sabemos que d não é divisor comum de m e n.
    - Nesta iteração d é decrementado, ou seja, d' = d - 1.
  - Portanto, no início da iteração seguinte temos que
    - todo t > d' (que agora inclui o antigo d)
      - não é divisor comum de m e n.
- Note que, quando o laço termina d é divisor comum de m e n,
  - já que essa é a única condição que permite sair do laço.
- Pelo invariante, todo t > d
  - não é divisor comum de m e n.
- Portanto, d é o mdc(m, n).

Eficiência de tempo:

- O algoritmo itera no máximo min(m, n) - 1 vezes,
  - e em cada iteração realiza um número constante de operações.
- Portanto, seu consumo de tempo é proporcional a min(m, n) no pior caso,
  - i.e., O(min(m, n)).

Bônus/Quiz1:

- Podemos melhorar o algoritmo anterior
  - fazendo d = min(m, n) / i a cada iteração,
    - com i variando de 1 até min(m, n)^(1/2).
- Qual a eficiência desse novo algoritmo?
- Qual(is) invariante(s) de laço podemos usar para provar que ele está correto?

Agora veremos o algoritmo mais antigo deste curso,

- que já era conhecido a mais de 2 mil anos (datado de 300 a.C.).
    - Trata-se do algoritmo de Euclides.

Recorrência que motiva o algoritmo de Euclides:

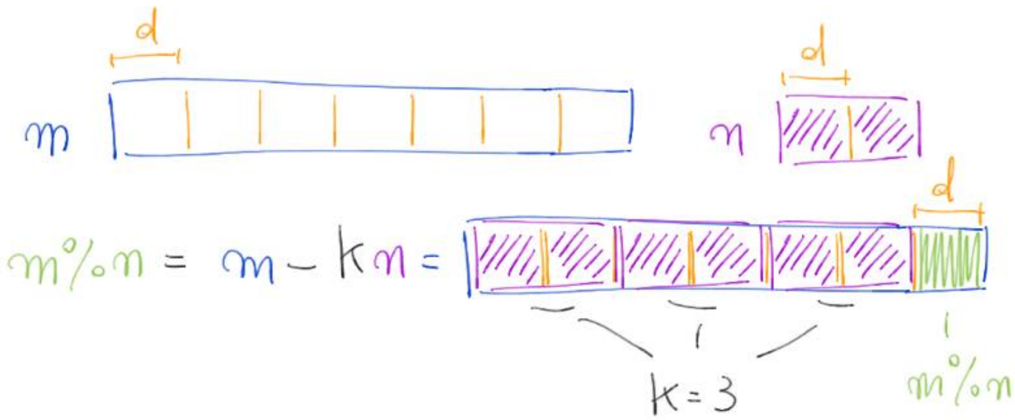
mdc(m, n) = { mdc(n, m%n), se n > 0,
m, se n = 0. }

Exemplo:

- mdc(12, 18) = mdc(18, 12) = mdc(12, 6) = mdc(6, 0) = 6.
- Note que, se m < n então a primeira aplicação da recorrência
    - realiza a inversão dos valores, pois m % n = m se n > m.
- Observe que, a base da recorrência vale,
    - pois qualquer inteiro positivo divide 0.

Recorrência deriva da propriedade:

- d divide m e n se e somente se d divide n e m%n.
    - Ou seja, o conjunto de divisores comuns a m e n
        - é igual ao conjunto de divisores comuns a n e m%n.
- Demonstração (opcional):
    - Primeiro vamos mostrar a volta da implicação dupla.
        - Suponha que d divide n e m%n, ou seja,
            - n = d * p,
            - m%n = d * q.
        - Queremos mostrar que d divide m.
        - Note que, m = k * n + m%n para algum k >= 0.
        - Substituindo temos,
            - m = k * (d * p) + (d * q) = d * (k * q + h).
        - Ou seja, d divide m.
    - A prova da ida é semelhante.
        - Suponha que d divide m e n, ou seja,
            - m = d * p,
            - n = d * q.
        - Queremos mostrar que d divide m%n.
        - Note que, m = k * n + m%n para algum k >= 0.
        - Substituindo temos,
            - (d * p) = k * (d * q) + m%n.
        - Logo,
            - m%n = d * (p) - d * (k * q) = d * (p - k * q)
        - Ou seja, d divide m%n.
- Interpretação:
    - Como m = k * n + m%n temos m%n = m - k * n.
    - Sendo m e n múltiplos de d, o resultado de m - k*n
        - corresponde à remoção de um número inteiro de “d”s.
    - Assim, o que sobra em m%n também é um número inteiro de “d”s,
        - como mostra a figura a seguir.



Da relação de recorrência obtemos o algoritmo recursivo de Euclides:

```c
int euclidesR(int m, int n) {
   if (n == 0)
       return m;
   return euclidesR(n, m % n);
}
```

Como a recursão é caudal, podemos transformá-lo

- no algoritmo iterativo de Euclides:

```c
int euclidesI1(int m, int n) {
   int r;
   while (1) {
       if (n == 0)
           return m;
       r = m % n;
       m = n;
       n = r;
   }
}

int euclidesI3(int m, int n) {
   int r;
   while (n != 0) {
       r = m % n;
       m = n;
       n = r;
   }
   return m;
}
```

Análise de eficiência experimental:

- testar os diferentes algoritmos com m = 2147483647 e n = 2147483646.

Eficiência de tempo:

- Duas observações centrais na análise de euclidesR(m, n):
  - a eficiência é proporcional ao número de chamadas recursivas.
  - o número de chamadas depende de quão rápido m e n diminuem.
- Propriedade: para a >= b > 0 temos a%b < a / 2.
  - Note que, a = k * b + a%b → a%b = a - k * b
  - Intuitivamente,
    - se b > a/2 então tirando b de a sobrará menos da metade de a,
    - se b = a/2 então o resto a%b será zero,
    - se b < a/2 então tirando vários b de a sobrará algo menor que b.
  - Formalmente,
    - supondo, por contradição, que a%b >= a/2 temos
      - a%b = a - k * b >= a/2 → 2a - 2 k * b >= a → a >= 2 k * b
    - Absurdo, já que k é o maior inteiro tal que k * b <= a.
- Vamos usar o índice i nos parâmetros m_i e n_i para representar
  - seus valores na i-ésima chamada recursiva do algoritmo.
- Assim:
  - n_i+1 = m_i % n_i e m_i+1 = n_i,
    - o que implica n_i+2 = n_i % n_i+1.
- Portanto, n_i+2 = n_i % n_i+1 < n_i / 2, ou seja,
  - a cada duas chamadas o tamanho de n cai por pelo menos metade.
- Exemplo:
  - n_2 = n_0%n_1 < n_0 / 2 = n / 2 = n / 2^1
  - n_4 = n_2%n_3 < n_2 / 2 < n / 4 = n / 2^2
  - n_6 = n_4%n_5 < n_4 / 2 < n / 8 = n / 2^3
  - n_8 = n_6%n_7 < n_6 / 2 < n / 16 = n / 2^4
  - ...
- Generalizando:
  - n_t < n / 2^(t/2), para a t-ésima chamada recursiva.
- Lembre que, depois de dividir um número por 2 (arredondando para baixo)
  - mais de log n vezes, ele se torna zero.
- Disso derivamos que o algoritmo faz
  - no máximo 2 lg n + 1 chamadas recursivas.
- Assim, ele leva tempo O(log min(m,n)).
- Note que, a mesma análise se aplica ao algoritmo iterativo,
  - pois a atualização dos valores de m e n a cada iteração
    - é idêntica à atualização à cada chamada recursiva.