PAA - Aula 21
Caminhos Mínimos de Todos para Todos, Algoritmos de Floyd-Warshall e de Johnson

O problema dos caminhos mínimos de todos para todos

Neste problema recebemos como entrada:

- um grafo orientado (ou dirigido) G=(V,E),
- com custo c(e) em cada aresta ‘e’ em E.

E queremos encontrar:

- o valor do caminho mínimo de ‘u’ até ‘v’ para todo par u, v em V.
- Também gostaríamos que esses caminhos fossem devolvidos.

No caso de haver um circuito negativo na entrada

- o valor dos caminhos mínimos não está bem definido.
    - Por isso, tal fato deve ser reportado.

Com o conhecimento que já temos, podemos resolver esse problema.

- Quiz1: Como? Que conhecimento?

Uma estratégia para resolver o problema é

- executar um algoritmo de caminhos mínimos a partir de cada vértice.

- Este procedimento leva tempo
  - O(n * tempo do algoritmo de caminhos mínimos utilizado).

Se os custos da entrada são não negativos

- podemos usar o algoritmo de Dijkstra, que leva tempo Theta(m log n).

- Portanto, nosso algoritmo para encontrar
  - caminhos mínimos de todos para todos levará tempo
    - n * Theta(m log n) = Theta(n m log n).

- Se o grafo é esparso, i.e., m = Theta(n) temos
  - Theta(n m log n) = Theta (n^2 log n).
- o que é muito bom, já que, apenas para devolver os valores das soluções,
  - precisamos preencher n^2 posições.

- Se o grafo for denso, i.e., m = Theta(n^2) temos
  - Theta(n m log n) = Theta (n^3 log n)
- o que é razoável, já que gastamos pouco mais que tempo linear
  - por caminho mínimo encontrado.

Se os custos da entrada podem ser negativos temos que

- usar o algoritmo de Bellman-Ford, que leva tempo Theta(n m).

- Portanto, nosso algoritmo para encontrar
  - caminhos mínimos de todos para todos levará tempo
    - n * Theta(n m) = Theta(n^2 m).

- Se o grafo é esparso, i.e., m = Theta(n) temos Theta(n^2 m) = Theta (n^3),
  - o que é razoável, já que gastamos tempo linear
    - por caminho mínimo encontrado.

- Se o grafo for denso, i.e., m = Theta(n^2) temos Theta(n^2 m) = Theta (n^4),
  - o que já não é tão bom, embora seja polinomial,
    - i.e., muito melhor que buscas exaustivas exponenciais.

Será que conseguimos fazer melhor?

- Ao olhar para caminhos mínimos entre todos os pares de vértices,
  - percebemos que subcaminhos ótimos podem ser compartilhados,
    - o que evita recálculos.
- Seguindo essa intuição, veremos um algoritmo de programação dinâmica
  - que usa uma subestrutura ótima diferente
    - daquela do algoritmo de Bellman-Ford
- e resolve o problema em tempo Theta(n^3).

Subestrutura ótima para o algoritmo de Floyd-Warshall

No problema dos caminhos mínimos de todos para todos
    - não temos uma origem fixa.
- Por isso, para definir cada subproblema precisamos
    - pelo menos de dois parâmetros, i.e., origem ‘i’ e destino ‘j’.

Além disso, também é crítico definir claramente
    - quais subproblemas são menores e quais são maiores.
- No algoritmo de Bellman-Ford usamos um parâmetro
    - que determinava o número de arestas (ou vértices) máximo
        - que o caminho podia ter.
- Nessa análise de subestrutura ótima,
        - que dará origem ao algoritmo de Floyd-Warshall,
    - vamos usar algo um pouco mais forte.

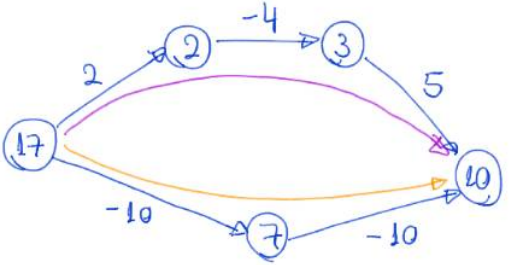
Dada uma ordem arbitrária dos vértices, i.e., V = {1, 2, ..., n},
- usaremos um parâmetro ‘k’ que determina que
    - apenas os primeiros ‘k’ vértices da ordem
        - podem ser vértices intermediários do caminho,
    - i.e., os vértices intermediários estão em V(k) = {1, 2, ..., k}.

Definidos os parâmetros i, j, k, temos L(i, j, k)

- que corresponde ao problema de encontrar
  - o menor caminho de ‘i’ até ‘j’
- que só usa vértices intermediários de V(k) = {1, 2, ..., k}.

Exemplos:

Origem $i = 17$
destino $j = 10$
limitador $k = 5$



$i = 17$
$j = 10$
$k = 8$

$A[17, 10, 5] = 3$

$A[17, 10, 8] = -20$

$i = 17 \quad j = 10 \quad k = 2$

$A[17, 10, 2] = +\infty$

Sendo P a solução ótima para L(i, j, k)

- vamos analisar sua subestrutura ótima em relação ao vértice ‘k’.

- Temos duas possibilidades:

Caso 1) Se o vértice ‘k’ não é um vértice intermediário de P

- então P é uma solução ótima de L(i, j, k-1).

Caso 2) Se o vértice ‘k’ é um vértice intermediário de P então seja

- P1 a parte de P que vai de ‘i’ até ‘k’,
- P2 a parte de P que vai de ‘k’ até ‘j’.

- Como não temos ciclos negativos, P não tem circuitos.
- Portanto, o vértice ‘k’ não aparece no meio de P1,
  - que é uma solução de L(i, k, k-1).
- De modo similar, o vértice ‘k’ não aparece no meio de P2,
  - que é uma solução de L(k, j, k-1).

Resta mostrar que, tanto P1 quanto P2

- são soluções ótimas de seus respectivos subproblemas.

- Para tanto, basta fazer um argumento por contradição e mostrar que
  - se houvesse uma solução melhor para algum dos subproblemas,
- obteríamos uma solução melhor que P para L(i, j, k),
  - o que é uma contradição.

Recorrência

Dessa subestrutura ótima derivamos a seguinte recorrência

- A[i, j, k] = min{A[i, j, k-1], A[i, k, k-1] + A[k, j, k-1]}

- sendo que A[i, j, k] corresponde ao valor do caminho mínimo
  - de ‘i’ para ‘j’ que só usa vértices em V(k) = {1, 2, ..., k}.

Os valores de ‘i’ e ‘j’ variam sobre todos os vértices, i.e, de 1 até ‘n’,

- e ‘k’ varia de ‘0’ até ‘n’,
  - i.e., V0 = emptyset até Vn = V.

Os casos base ocorrem quando k = 0. Nestes casos

- A[i, j, 0] = 0 se i = j,
  - pois existe caminho de ‘i’ para ‘i’ sem arestas e custo ‘0’.

- A[i, j, 0] = c(i, j) se (i, j) \in E,
  - pois existe caminho de ‘i’ para ‘j’ com apenas a aresta (i, j).

- A[i, j, 0] = +\infinity se i != j e (i, j) \not \in E,
  - pois não existe caminho de ‘i’ para ‘j’ sem vértices intermediários.

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
algFloydWarshall(G = (V, E), c) {

    // Casos Base
    para i = 1 até n:
        para j = 1 até n:
            se i = j: então A[i, j, 0] = 0
            senão se (i, j) \in E: então A[i, j, 0] = c(i, j)
            senão A[i, j, 0] = +\infinity

    para k = 1 até n:
        para i = 1 até n:
            para j = 1 até n:
                A[i, j, k] = min{A[i, j, k-1], A[i, k, k-1] + A[k, j, k-1]}
```

Eficiência: Theta(n^3), três laços aninhados, cada um indo de 1 até n,

- e resolver a recorrência leva tempo constante.

Quiz2: Posso inverter a ordem dos laços aninhados? Por que?

Quiz3: Em que células da matriz estão as soluções ótimas?

Bônus: Como detectar circuito negativo?

Basta percorrer a diagonal A[i, i, n], para i = 1, ..., n.

- Se não houver circuito negativo ela estará preenchida de zeros.
    - Se houver, ao menos um posição terá valor negativo.

Para obter alguma intuição do por que isso ocorre,

- considere que existe um circuito negativo.
- Seja ‘k’ o vértice de mais alto índice na nossa ordem,
    - i.e., o último vértice do circuito a ser permitido num subproblema.
- Seja ‘i’ um outro vértice do circuito.

Considere a iteração do algoritmo em que A[i, i, k] é calculado.

- Pela recorrência, temos que A[i, k, k-1] + A[k, i, k-1] será considerado.
    - Mas este é exatamente o valor do circuito negativo.
- Assim, nesta iteração A[i, i, k] receberá um valor negativo,
    - o qual será passado adiante até o final do algoritmo.

Bônus: Como reconstruir a solução?

Como nossa recorrência basicamente decide

- se um vértice intermediário é ou não usado
    - no caminho mínimo entre dois pontos,
- para reconstruir a solução podemos usar uma matriz auxiliar B[i, j]
    - cujo valor é o vértice intermediário de mais alto índice
        - usado no caminho mínimo de ‘i’ até ‘j’.

Assim, para reconstruir o caminho de ‘i’ até ‘j’, colocamos

- o vértice em B[i, j] no “meio” do caminho sendo reconstruído.
- Então, recursivamente reconstruímos
    - a primeira parte do caminho de ‘i’ até B[i, j],
- e, também recursivamente reconstruímos
    - a segunda parte do caminho de B[i, j] até ‘j’.

Algoritmo de Johnson

algJohnson(G=(V,E), c):

1 - construa G' adicionando um vértice 's'
- e uma aresta com custo '0' indo de 's' até cada 'v' em V.

2 - execute o algoritmo de Bellman-Ford em G' com custos 'c' a partir de 's'.
- Para cada vértice 'v' em V seja
  - Pv = caminho mínimo encontrado pelo algoritmo de Bellman-Ford.

3 - para cada aresta (u, v) em E
- calcule custos c'(u, v) = c(u, v) + c(Pu) - c(Pv).

4 - para cada vértice 'v' em V execute o algoritmo de Dijkstra em G
- com custos c' a partir de 'v'.

Sejam d'(u, v) as distâncias obtidas p
- elas diversas execuções do algoritmo de Dijkstra.

5 - Para cada par de vértices u, v em V calcule d(u, v) = d'(u, v) - c(Pu) + c(Pv).

Eficiência:

1 - Theta(n)

2 - Theta(n m)

3 - Theta(m)

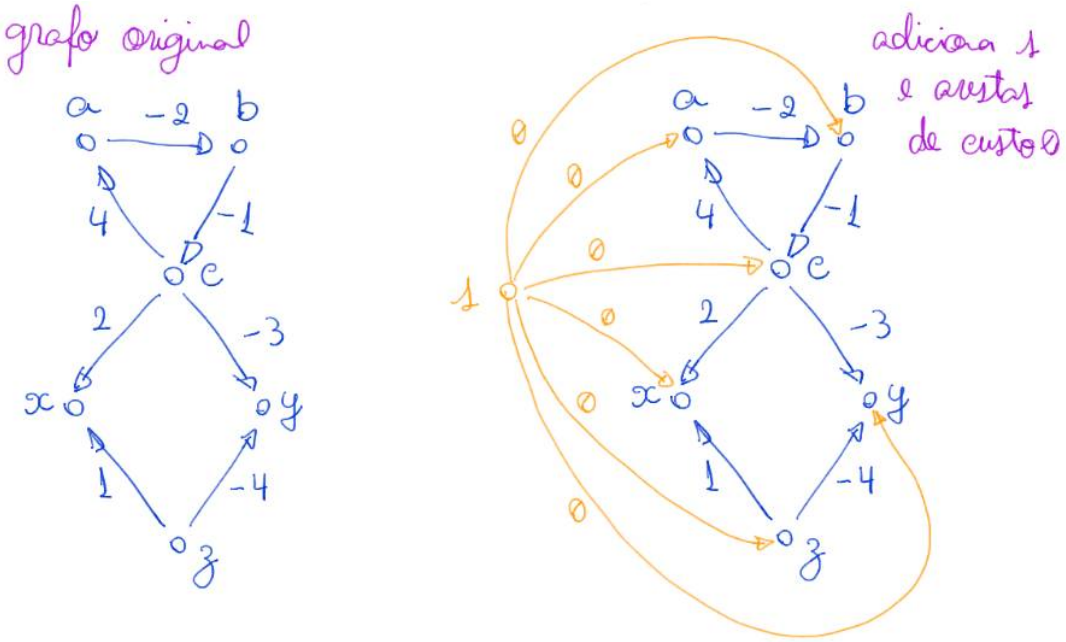
4 - n * Theta(m log n) = Theta(n m log n)

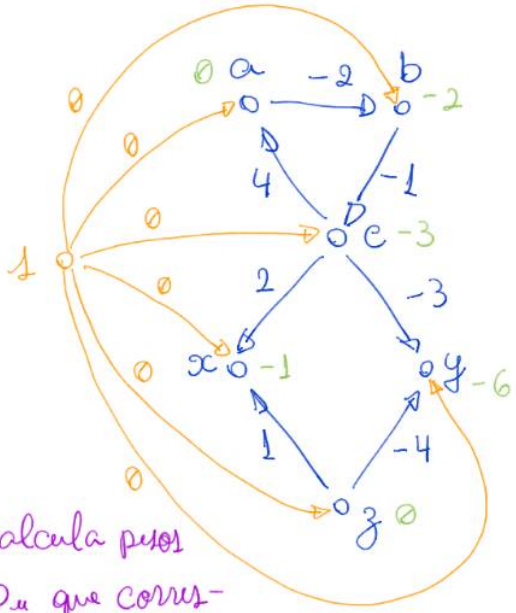
5 - Theta(n^2)

como n = O(m), o tempo do algoritmo é dominado por Theta (n m log n),

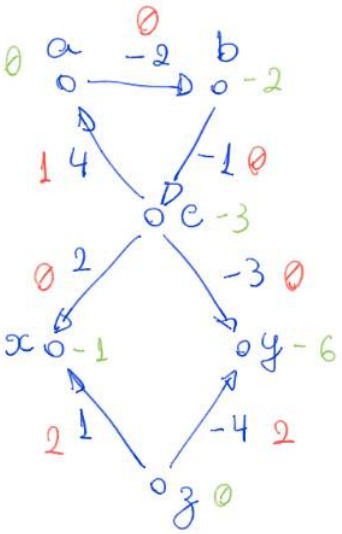
- que supera o algoritmo de Floyd-Warshall em grafos esparsos.

Exemplo:


grafo original
a
b
c
x
y
z
-2
4
-1
2
-3
1
-4
adicionar 1
e arestas
de custo 0
0
1



calcula pesos p_u que correspondem ao caminho mínimo de s a u



calcula $c'(u,v) = c(u,v) + p_u - p_v$

Corretude: depende de dois fatores

1) a mudança de custos não altera a ordem relativa
- entre os caminhos com mesma origem e destino.

2) a mudança de custos torna todos os custos não negativos.

Para verificar que 1) ocorre, tome um caminho qualquer P entre ‘i’ e ‘j’.
- Caculando o custo original de P temos
  - c(P) = sum_{e \in P} c(e)

- Calculando o custo modificado de P temos
  - c'(P) = sum_{e \in P} c'(e)
    = sum_{e=(u,v) \in P} (c(e) + c(Pu) - c(Pv))
    = c(Pi) - c(Pj) + sum_{e=(u,v) \in P} c(e)
    = c(Pi) - c(Pj) + c(P)

onde a penúltima desigualdade vale pois cada vértice ‘v’
- interno do caminho Pv aparece duas vezes no somatório,
  - uma vez com sinal positivo e outra vez com sinal negativo.

Note que, independente de qual seja o caminho P entre ‘i’ e ‘j’,

- a diferença entre c(P) e c’(P) depende apenas de c(Pi) e de c(Pj).

- Portanto, a mudança de custos não altera a ordem relativa
  - entre os caminhos com mesma origem e destino.
- O resultado c(P) = c’(P) - c(Pi) + c(Pj) também explica
  - o cálculo feito no passo 5 do algoritmo.

Para verificar que 2) ocorre, note que o valor c(Pu) para um vértice ‘u’ qualquer

- corresponde ao caminho mínimo de ‘s’ até ‘u’.

- Como ‘s’ tem uma aresta de custo zero entrando em todos os vértices,
  - o custo dos caminhos mínimos originados em ‘s’ será sempre <= 0.

Considere uma aresta (u, v) qualquer.

- Um caminho possível para ir de ‘s’ até ‘v’ é
  - ir de ‘s’ até ‘u’ e então usar a aresta (u, v).
- Portanto
  - c(Pv) <= c(Pu) + c(u, v) → c(u, v) + c(Pu) - c(Pv) >= 0.
- Mas isso conclui a demonstração, pois
  - c’(u, v) = c(u, v) + c(Pu) - c(Pv) >= 0.

Como tomamos uma aresta qualquer, mostramos que

- a mudança de custos torna não negativos os custos de todas as arestas.