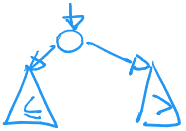
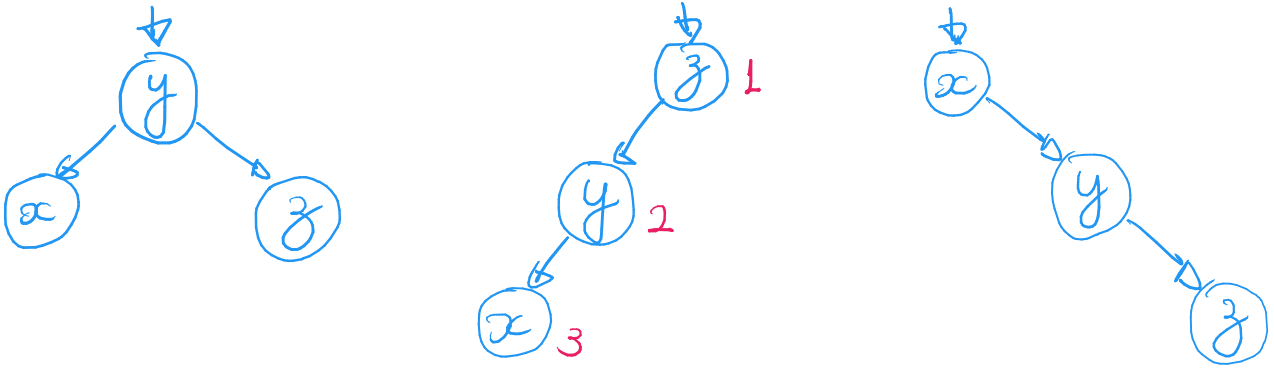
# PAA - Aula 19
## Problema da Árvore Binária de Busca Ótima



Dado um conjunto de itens, qualquer árvore binária de busca

- deve respeitar a propriedade de que
  - os itens da subárvore esquerda são menores que a raiz,
  - que, por sua vez, é menor que os itens da subárvore direita.
- No entanto, existem inúmeras árvores binárias de busca válidas
  - para um mesmo conjunto de itens.
- Por exemplo, considere itens $x < y < z$
  - Quais as árvores binárias de busca válidas para estes três itens?




- Assim surge a questão: qual a melhor árvore para busca?

Note que, o tempo de acesso a um item depende da profundidade deste na árvore,

- sendo profundidade o número de nós no caminho da raiz até o item.

Assim, pensando numa árvore de propósito geral e numa análise de pior caso,

- a melhor árvore é aquela que tem a menor altura, lembrando que
  - altura é o comprimento do caminho mais longo da raiz até um item.
- Portanto, uma árvore binária de busca balanceada, como
  - uma árvore AVL ou Rubro-Negra, é assintoticamente ótima,
    - por ter altura $O(\log n)$ sendo $n$ o número de nós na árvore.

Sendo este o caso, o que queremos dizer com Árvores Binárias de Busca Ótimas?

- Este problema surge em contextos em que conhecemos
  - a frequência/probabilidade com que os itens são acessados.
- Por exemplo, porque eles são palavras de uma linguagem
  - num software de verificação de erros gramaticais.
- Nestes casos vamos buscar algo melhor do que árvores de propósito geral.

## Definição do problema

Entrada: uma lista com $n$ itens (em ordem crescente),

- que podem ser números, caracteres, palavras, etc,
- e uma probabilidade de acesso $p_i$ para cada item $i$ com $1 \leq i \leq n$

Solução: uma árvore binária de busca $T$

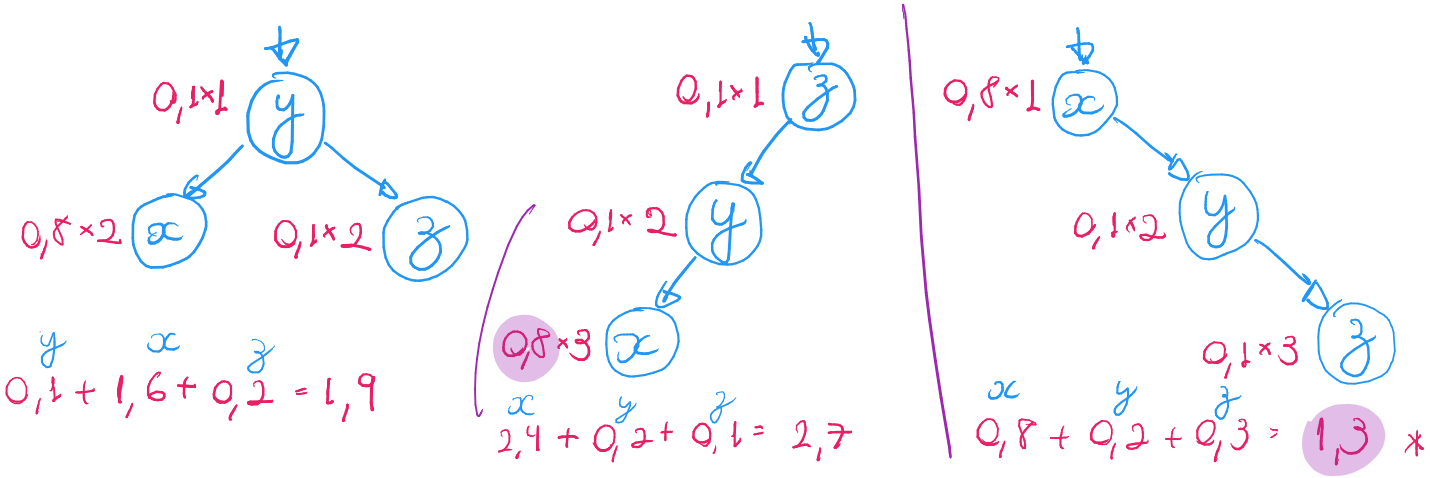
- que minimiza o tempo total esperado de busca dos itens, ou seja,

$$C(T) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot prof(i, T)$$

  - sendo $prof(i,T)$ a profundidade no item $i$ na árvore $T$
- Lembre que profundidade é o número de nós no caminho da raiz até o item,
  - e note que o tempo de busca é proporcional à profundidade do item.

Exemplo: Dados itens $x < y < z$ com

- probabilidades de acesso $p_x = 80\%$, $p_y = 10\%$ e $p_z = 10\%$
  - qual o tempo total esperado de busca dos itens em cada árvore?




Note que, para estas frequências de acesso a árvore balanceada não é a melhor,

- mas sim a árvore que deixa mais perto do topo o item mais provável.

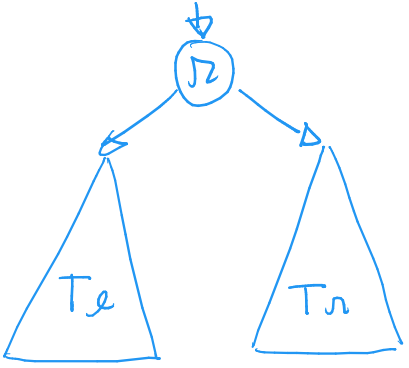
## Subestrutura ótima

Para simplificar a análise, supomos que os $n$ itens da nossa árvore

- tem valores distintos no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ Mas ressaltamos
  - que os argumentos funcionam com qualquer conjunto de itens.

Começamos pelo exercício de abstração de imaginar uma solução ótima.

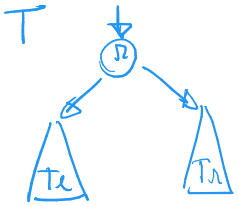
- Neste caso, uma árvore binária de busca ótima $T$ com raiz $r$




O que sabemos sobre $T$ e suas subárvores $T_e$ e $T_r$ ?

- Como temos uma árvore binária de busca,
  - $T_e$ contém os itens $\{1, \ldots, r-1\}$ e $T_r$ contém os itens $\{r+1, \ldots, n\}$
- Vamos mostrar que $T_e$ é ótima para $\{1, \ldots, r-1\}$ e $T_r$ é ótima para $\{r+1, \ldots, n\}$

A ideia dessa demonstração é que, se $T_e$ ou $T_r$ não fossem ótimas
- para seus respectivos subconjuntos de itens,
- poderíamos obter uma árvore $T^*$ melhor que $T$
  - trocando sua subárvore esquerda e/ou direita pelas ótimas.
- Vamos formalizar este argumento, provando que $T_e$ é ótima.



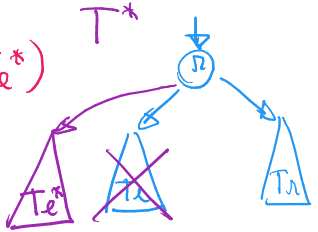

Suponha, por contradição, que $T_e$ não é ótima, ou seja,
- que existe outra árvore $T_e^*$ para os itens $\{1, 2, \ldots, n-1\}$
  - com tempo total esperado de busca menor que
    - i.e., $C(T_e^*) < C(T_e)$ ⇐ por absurdo

Usando a definição de $C(T)$ temos

$$C(T) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot prof(i, T)$$

$$C(T_e) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot prof(i, T_e) \quad (a)$$

$$C(T_e^*) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot prof(i, T_e^*)$$




Vamos construir uma nova árvore $T^*$ para os itens $\{1, 2, \ldots, n\}$
- removendo $T_e$ de $T$ e colocando $T_e^*$ no lugar.
- Assim, para concluir a prova, basta mostrar que $C(T^*) < C(T)$
  - pois isso contradiz o fato de $T$ ser ótima.

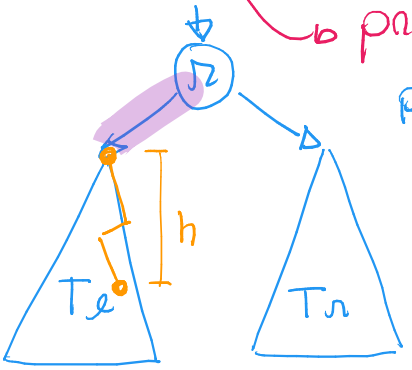
Vamos analisar $C(T)$ mais de perto. $C(T) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot prof(i,T)$

Como $T$ está enraizada em $r$ vamos dividir o somatório

- em três blocos

$$C(T) = \sum_{i=1}^{r-1} p_i \cdot prof(i,T) + p_r \cdot 1 + \sum_{i=r+1}^{n} p_i \cdot prof(i,T)$$

Foque num item $i$ em $T_e$. Note que




$$prof(i,T) = 1 + prof(i,T_e) \quad *_1$$
p/ $i \in T_e$

$$prof(i,T) = 1 + prof(i,T_r) \quad *_2$$
p/ $i \in T_r$

- Observe que o mesmo vale para um item em $T_r$. Assim

$$C(T) = \sum_{i=1}^{r-1} p_i (1 + prof(i,T_e)) + p_r + \sum_{i=r+1}^{n} p_i (1 + prof(i,T_r))$$
($*_1$ sobre $prof(i,T_e)$, $*_2$ sobre $prof(i,T_r)$)

Tirando os termos constantes dos somatórios

$$C(T) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot 1 + \sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot prof(i, T_e) + p_n + \sum_{i=n+1}^{n} p_i \cdot 1 + \sum_{i=n+1}^{n} p_i \cdot prof(i, T_n)$$

Agrupando os somatórios, obtemos

$$C(T) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot prof(i, T_e) + \sum_{i=n+1}^{n} p_i \cdot prof(i, T_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Note que os dois primeiros somatórios são $C(T_e)$ e $C(T_n)$. Portanto,

$$C(T) = C(T_e) + C(T_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Fazendo o mesmo desenvolvimento para $T^*$ chegamos a

$$C(T^*) = C(T_e^*) + C(T_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i$$

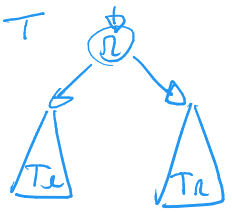
Para concluir, como supusemos por absurdo que $C(T_e^*) < C(T_e)$, temos

$$C(T) = C(T_e) + C(T_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i > C(T_e^*) + C(T_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i = C(T^*)$$

- Quer dizer, se $T_e$ não for ótima então $T$ também não é,
  - chegamos em uma contradição.

A prova da otimalidade de $T_n$ é idêntica.

## Recorrência




Dada a subestrutura ótima que encontramos

- uma árvore binária de busca ótima $T$ enraizada em $r$ tem
  - subárvore esquerda $T_e$ e direita $T_r$ que são ótimas,
- respectivamente, para os conjuntos de itens $\{1, \ldots, r-1\}$ e $\{r+1, \ldots, n\}$

Note que não sabemos qual é a raiz da árvore ótima, o que leva à questão:

- Quais as raízes possíveis para uma árvore que contém o conjunto $\{1, \ldots, n\}$?
  - R: São $n$ raízes possíveis, i.e, todos os itens em $\{1, \ldots, n\}$
- Isso indica que na nossa recorrência
  - temos que escolher a melhor solução entre as $n$ possíveis.

Outro ponto relevante é, quando fixamos uma raiz $r$

  - quantos/quais subproblemas temos que considerar?
- R: São dois subproblemas,
  - um que contém os itens $\{1, \ldots, r-1\}$
    - e outro que contém os itens $\{r+1, \ldots, n\}$

E como se relacionam os custos da árvore $T$ enraizada em $r$

  - com o custo de suas subárvores ótimas?
- R: $$c(T) = c(T_e) + c(T_r) + \sum_{k=1}^{n} p_k$$

Escrevendo a relação de custo de uma árvore ótima para os itens $\{1, \ldots, n\}$

- considerando as $n$ raízes possíveis e
  - os subproblemas de cada caso, temos a recorrência

$$A[1,n] = \min_{r=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} p_k + A[1, r-1] + A[r+1, n] \right\}$$

$O(n)$

  - com a ressalva de que $A[i,j] = 0$ se $i > j$

Note, no entanto, que nossa recorrência está escrita com os parâmetros $1$ e $n$

- Será que só precisamos nos preocupar
  - com sequências de itens começadas em $1$ e terminadas em $n$ ?
- R: Não. Para perceber isso, considere resolver o problema $A[1,n]$ e note que
  - para isso precisamos do valor de $A[1,j]$ para todo $j$ em $[1,n]$
- Foque em um $j$ particular e considere o subproblema $A[1,j]$
  - Agora, repetindo o raciocínio, para resolver $A[1,j]$
    - precisamos do valor de $A[i,j]$ para todo $i$ em $[1,j]$
- Portanto, nosso total de subproblemas corresponde
  - a todos os intervalos contínuos $\{i, i+1, \ldots, j\}$ com $i \leq j$

$O(n^2)$

$A[1,n] = A[1,r-1] + \ldots$

$A[1,r-1] = A[1,\ell-1]$

$+ \sum p_k + A[\ell+1, r-1]$

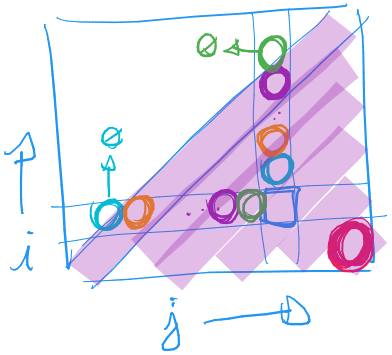
Assim, reescrevendo nossa recorrência, para todo par $1 \leq i \leq j \leq n$ temos

$$A[i,j] = \min_{r=i..j} \left\{ \sum_{k=i}^{j} p_k + A[i, r-1] + A[r+1, j] \right\}$$

  - lembrando da nossa convenção de que $A[i,j] = 0$ se $i > j$

**Algoritmo:** A base do algoritmo é sempre ter certeza de que

- os problemas menores serão resolvidos antes dos maiores.




algABBO(n, p):

```
p/ todo par (i,j) c/ i > j: A[i,j] = 0
para tam = 1 até n:
    para i = 1 até n - tam + 1:
        j = i + tam - 1
        A[i,j] = min_{r=i..j} { Σ_{k=i}^{j} p_k + A[i,r-1] + A[r+1,j] }
devolva A[1,n]
```

2 laços aninhados realizam $\Theta(n^2)$ iterações

1° l.p. 2° l.p. $\Theta(n)$

Para entender o funcionamento desse algoritmo, observe que

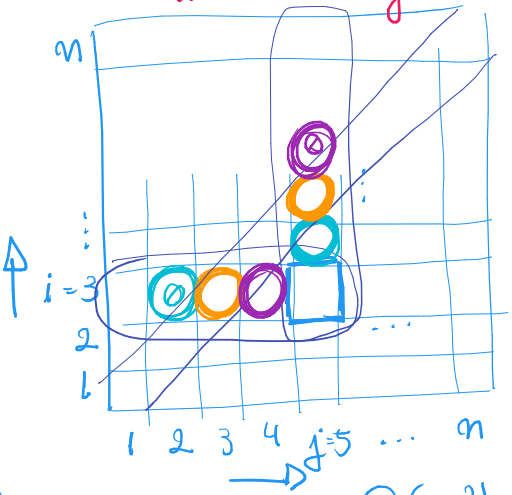
- tam é o tamanho do subproblema/intervalo corrente de itens,
  - $i$ é o início de um intervalo e $j$ é o final do mesmo.
- Assim, começamos no menor tamanho de subproblema
  - e aumentamos a cada iteração.

Note também que o algoritmo começa preenchendo

- a diagonal principal de uma matriz,
- e em cada iteração subsequente preenche uma "diagonal" menor.

Por fim, observe que para preencher uma célula $A[i,j]$ o algoritmo considera

- os subproblemas da linha $i$ e da coluna $j$ utilizando-os aos pares.




$A[i,j]$

$$A[i,j] = \min_{i \le r < j} \left\{ \sum_{k=i}^{j} p_k + \underbrace{A[i,r-1]}_{1^{\circ}\ \text{s.p.}} + \underbrace{A[r+1,j]}_{2^{\circ}\ \text{s.p.}} \right\}$$

$r = 3$
$r = 4$
$r = 5$

Eficiência: $\Theta(n^3)$ pois tem de resolver $\Theta(n^2)$ recorrências

- (preencher metade de uma matriz $n$ por $n$),
- e para resolver cada recorrência (preencher cada célula da matriz)
  - precisa consultar em média $\Theta(n)$ outras posições da matriz.

Construindo a árvore: demanda saber qual a raiz escolhida em cada subproblema.

- Guardar as raízes numa matriz auxiliar $B$ cada vez que o algoritmo
  - resolve uma recorrência torna a construção da árvore mais eficiente,
    - embora não seja obrigatório.