PAA - Aula 06
Teorema Mestre

Considere a recorrência $T(n) \leq a\,T(n/b) + c \cdot n^d$

O Teorema Mestre diz que

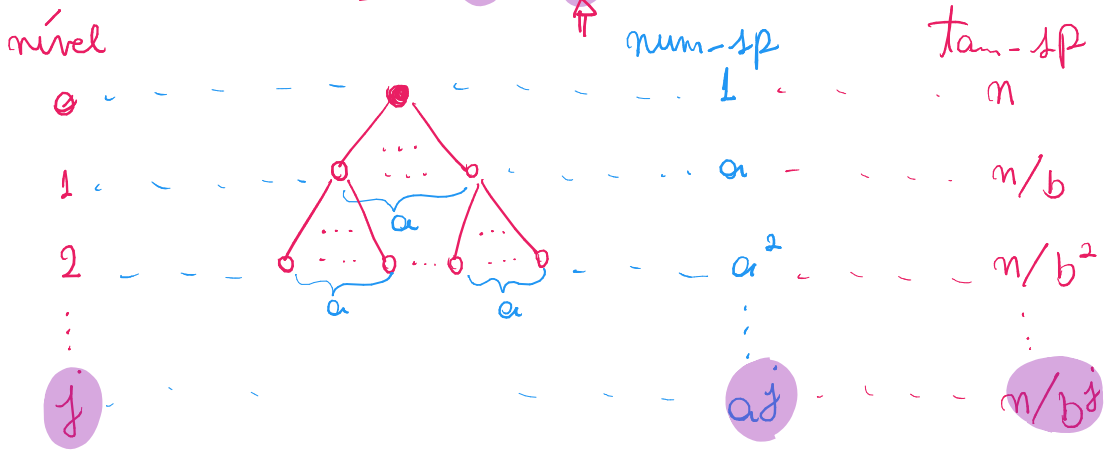
1 - $a = b^d \Rightarrow T(n) = O(n^d \log n)$

2 - $a < b^d \Rightarrow T(n) = O(n^d)$

3 - $a > b^d \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_b a})$

Vamos entender o porquê construindo uma árvore de recursão

- para a recorrência T(n) <= a * T(n/b) + c * n^d



Recorrência $T(n) <= a * T(n/b) + c * n^d$

Qual o número de subproblemas no nível j da árvore? $num\_sp(j) = a^j$

Qual o tamanho de um subproblema do nível j? $tam\_sp(j) = n/b^j$

Qual o trabalho local (não recursivo) em um problema no nível j?

R.: $trab\_sp(j) \leq c \cdot tam\_sp(j)^d = c \cdot (n/b^j)^d$

Qual o trabalho realizado no nível j?

$$trab(j) = num\_sp(j) \cdot trab\_sp(j)$$

$$= a^j \cdot c \cdot (n/b^j)^d = c \cdot \frac{a^j \cdot n^d}{b^{dj}} = c \cdot n^d \cdot \left(\frac{a}{b^d}\right)^j$$

Note que, só o termo a/b^d é influenciado pelo nível j. Por isso,

- interpretamos a como a taxa com que o trabalho aumenta por nível e
- b^d como a taxa com que o trabalho diminui por nível da árvore.

Quantos níveis tem a árvore de recursão?

- Sabemos que no último nível h o tamanho do subproblema é 1,
  - ou algum número pequeno que corresponda ao caso base.
- Assim,

$$tam\text{-}sp(h) = \frac{n}{b^h} = 1 \Rightarrow b^h = n \Rightarrow h = \log_b n$$

Por fim, qual o trabalho total realizado?

- Vamos somar ao longo de todos os níveis da árvore

$$T(n) = \sum_{j=0}^{h} trab(j) = \sum_{j=0}^{h} c \cdot n^d \left(\frac{a}{b^d}\right)^j = c \cdot n^d \sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^j$$

Chegamos à soma dos termos de uma PG com razão (a/b^d)

- e sabemos que o resultado de tal soma
  - depende particularmente da razão ser maior ou menor que 1.
- É daí que surgem os casos do Teorema Mestre.

Casos do Teorema Mestre

$$T(n) \leq c \cdot n^d \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^j$$

$$\log_b^n = \frac{\log_x^n}{\log_x^b}$$

Lembrando que trabalho total é dado por

- nossos casos dependem do valor da razão (a / b^d).

Caso 1: a = b^d $\Rightarrow \frac{a}{b^d} = 1 \Rightarrow$ trab. uniforme por nível

$$T(n) = c \cdot n^d \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n} \underbrace{\left(\frac{a}{b^d}\right)^j}_{1} = c \cdot n^d \left(\log_b^n + 1\right) = O(n^d \log n)$$

- T(n) é # de níveis vezes trabalho por nível

Caso 2: a < b^d $\Rightarrow \frac{a}{b^d} < 1 \Rightarrow$ trab. diminui por nível

se $q < 1$ temos $\sum_{j=0}^{+\infty} q^j \leq \frac{1}{1-q}$

$$T(n) = c \cdot n^d \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n} \underbrace{\left(\frac{a}{b^d}\right)^j}_{<1} \leq c \cdot n^d \frac{1}{1 - \frac{a}{b^d}} = \underbrace{\frac{c}{\left(1 - \frac{a}{b^d}\right)}}_{\text{constante}} \cdot n^d = O(n^d)$$

- T(n) é dominado pelo trabalho no primeiro nível da árvore

Caso 3: a > b^d $\Rightarrow \frac{a}{b^d} > 1 \Rightarrow$ Mult. aumenta por nível

$$T(n) \leq a\,T(n/b) + c \cdot n^d$$

$$T(n) \leq c \cdot n^d \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n} (a/b^d)^j \leq c \cdot n^d \cdot \frac{(a/b^d)^{1+\log_b n} - 1}{(a/b^d) - 1}$$

$$\leq \frac{c \cdot n^d \cdot (a/b^d) \cdot a^{\log_b n}}{(b^d)^{\log_b n}(a/b^d - 1)} = \frac{c \cdot n^d (a/b^d) \cdot a^{\log_b n}}{n^d (a/b^d - 1)}$$

$$= \frac{c(a/b^d)}{(a/b^d - 1)} \cdot n^{\log_b a} = O(n^{\log_b a})$$

Se $q > 1$ Temos

$$\sum_{j=0}^{k} q^j = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

$a^{\log_b n} \overset{?}{=} n^{\log_b a}$

$\log_b a^{\log_b n} = \log_b n^{\log_b a}$

$\log_b n \cdot \log_b a = \log_b a \cdot \log_b n$

- T(n) = O(a^log_b n) é o número de folhas no último nível da árvore.
  - Assim, T(n) é dominado pelo trabalho no último nível da árvore.
- Para verificar que a^log_b n = n^log_b a
  - aplique a operação log_b aos dois lados da equação.

Curiosidade: existe uma versão mais poderosa (e complicada) do Teorema Mestre,

- para lidar com recorrências em que o trabalho local não é um polinômio.
  - Desafio: troque c n^d por f(n) na recorrência e refaça árvore e análise.

Aplicando o Teorema Mestre

Considerando a recorrência T(n) <= a * T(n/b) + c * n^d, o Teorema Mestre diz que

1. a = b^d → T(n) = O(n^d log n)
2. a < b^d → T(n) = O(n^d)
3. a > b^d → T(n) = O(n^log_b a)

melhor que n^2

Algoritmo de Multiplicação de Inteiros de Karatsuba

- T(n) = 3 T(n/2) + c n^1 = d

Caso 3

a = 3, b = 2, d = 1 → $a = 3 > 2^1 = b^d \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 3}) \cong O(n^{1,585})$

Algoritmo de Ordenação mergeSort e Algoritmo para Encontrar o Par Mais Próximo

- T(n) = 2 T(n/2) + c n^1 = d

Caso 1

a = 2, b = 2, d = 1 → $a = 2 = 2^1 = b^d \Rightarrow T(n) = O(n \cdot \log n)$

Algoritmo de Multiplicação de Matrizes de Strassen

- T(n) = 7 T(n/2) + c n^2

melhor que n^3

Caso 3

a = 7, b = 2, c = 2 → $a = 7 > 2^2 = b^d \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 7}) \cong O(n^{2,81})$