AED2 - Aula 25

Busca em largura, caminhos mínimos em grafos não ponderados

Relembrando a busca genérica, mas usando um versão alternativa:

buscaGenérica $(G = (V, E), s)$
    marque todo $v \in V$ como ñ visitado
    - coloque s no conj. dos vértices ativos
    → enquanto ativos $\neq \emptyset$:
        remova um vértice v dos ativos
        → se v ainda não foi visitado
            marque v como visitado
            para cada aresta (v, w):
                se w ainda ñ foi visitado
                    coloque w no conj. dos ativos

Pense no conjunto de vértices ativos,

- como os vértices encontrados mas não visitados.

Observe que o algoritmo anterior

- não para antes de considerar todas as arestas alcançáveis a partir de s,
    - já que todo vértice visitado tem suas arestas analisadas.

Existem dois tipos de busca em grafo que são muito eficientes

- e cumprem funções bastante diferentes,
    - embora ambas sejam especializações da busca genérica.
- Uma delas é a busca em profundidade ou DFS (Depth-First Search),
    - que já estudamos exaustivamente.
- A outra é a busca em largura ou BFS (Breadth-First Search).

Hoje vamos nos aprofundar na BFS,

- que explora o grafo em camadas a partir de um vértice inicial s.
- Por isso, ela é particularmente útil
    - para calcular a distância não ponderada entre vértices.

A BFS explora o grafo em camadas a partir de um vértice inicial s,

- e esse comportamento está intimamente relacionado
    - com a estrutura de dados fila (queue ou FIFO).

Pseudocódigo:

```
buscaLargura(G=(V,E), s)
    marque todo v ∈ V como ñ encontrado          O(n)
    marque s como encontrado
    coloque s na fila Q
    enquanto Q ≠ ∅:                              O(n_s)
        remova v do início de Q
        para cada aresta (v,w)                   O(|S(v)|)
            se w não foi encontrado
                marque w como encontrado
                insira w no final de Q
                                                 O(m_s)
```

```
buscaGenérica(G=(V,E), s)
    marque todo v ∈ V como ñ visitado
    coloque s no conj. dos vértices ativos
    enquanto ativos ≠ ∅:
        remova um vértice v dos ativos
        se v ainda não foi visitado
            marque v como visitado
            para cada aresta (v,w):
                se w ainda ñ foi visitado
                    coloque w no conj. dos ativos
```

Comparando a BFS com a busca genérica, três diferenças se destacam:

- Marcamos explicitamente quando um vértice é encontrado.
- Não marcamos quando um vértice é visitado.
- Não verificamos se o vértice saindo da fila já foi visitado.

Notem que, os conceitos de encontrado e visitado valem

- mesmo que o algoritmo não os registre explicitamente.
- Assim, o que justifica as mudanças anteriores?

Corretude:

- O algoritmo encontra todos os vértices alcançáveis a partir de s.
    - Esse resultado segue da corretude do algoritmo de busca genérica,
        - já que a busca em largura é um caso particular daquela.
- Além disso, o algoritmo de busca em largura
    - explora o grafo em camadas centradas em s,
- mas isso vamos mostrar quando formos calcular distâncias.

Eficiência:

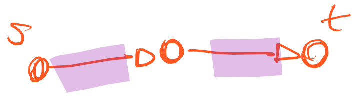
- O algoritmo leva tempo O(n) para marcar os vértices como não encontrados.
- O restante do algoritmo leva tempo O(n_s + m_s),
    - sendo n_s e m_s, respectivamente, os números de vértices e arestas
        - da componente conexa que contém o vértice s.
- Isso porque, em cada iteração do laço principal,
    - um vértice é removido da fila.
    - Logo, esse laço é executado O(n_s) vezes.
- Como cada vértice é colocado apenas uma vez na fila,
    - pois nunca inserimos vértices já encontrados,
    - cada aresta é visitada no máximo uma vez,
        - na iteração em que seu vértice origem sai da fila.
- Portanto, no total o algoritmo executa O(m_s) iterações do laço mais interno.

Cálculo de distâncias

ñ ponderado

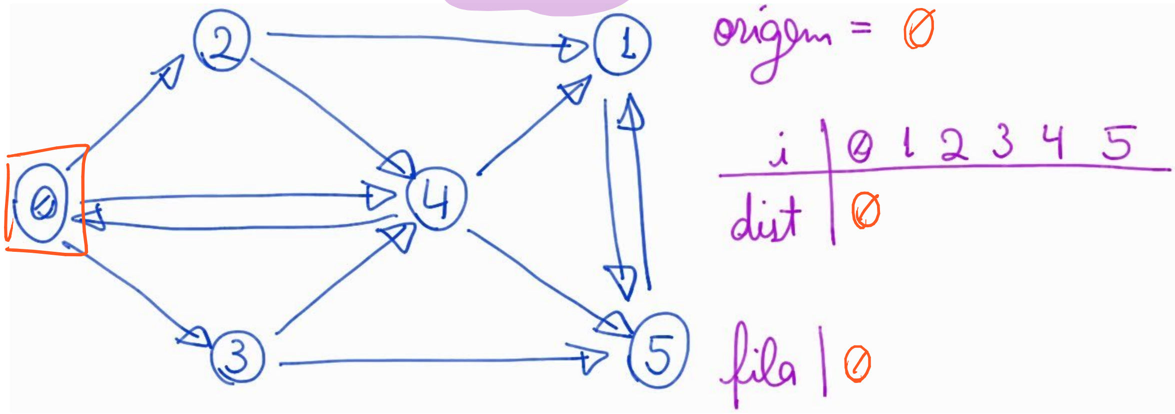
O comprimento de um caminho P é o número de arestas em P,

- ou, de modo equivalente, o número de vértices em P - 1.

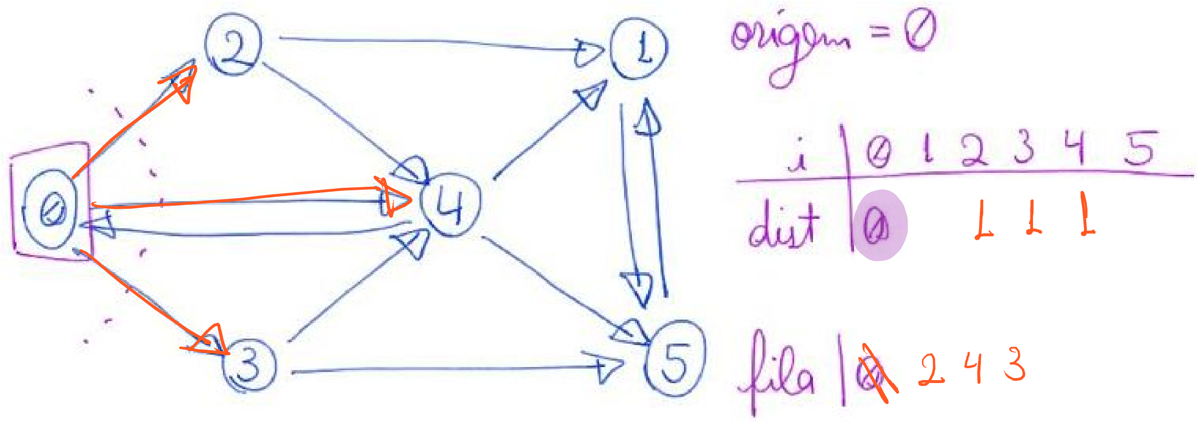


Exemplo 1:

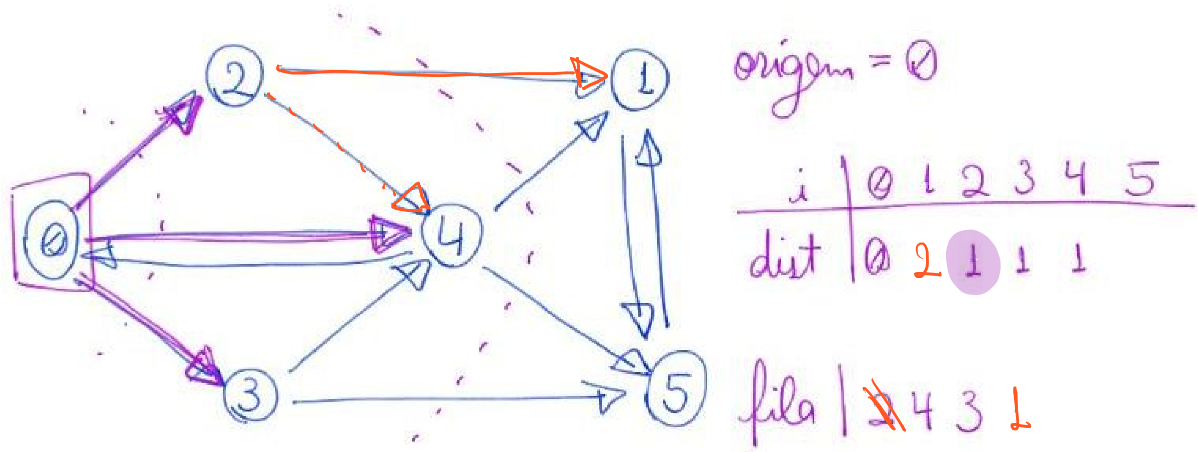
- No início apenas o vértice origem = 0 é alcançável e tem distância 0.



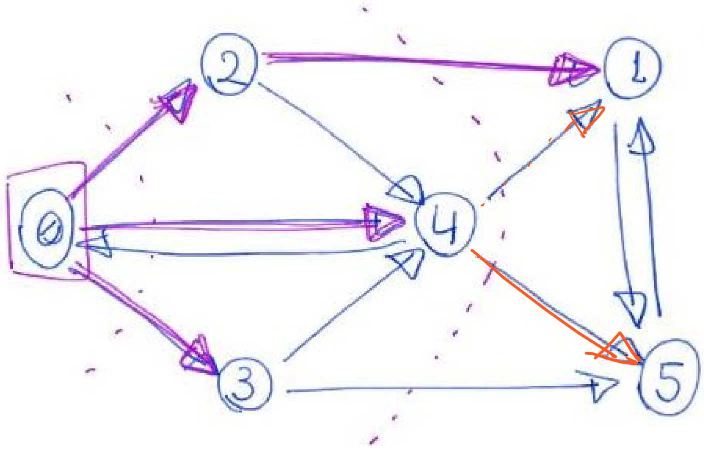
- Em cada iteração podemos encontrar novos vértices
  - e atualizar suas distâncias,
    - como sendo 1 a mais que a distância de quem o encontrou.



- Observe a importância de armazenar os vértices encontrados em uma fila
  - para preservar a ordem de descoberta
    - e assim calcular corretamente as distâncias.



- Por exemplo, se usássemos uma pilha, primeiro encontraríamos
  - o caminho que vai até 5 passando por 1, que tem comprimento 3.



origem = 0

i	0	1	2	3	4	5
dist	0	2	1	1	1	2

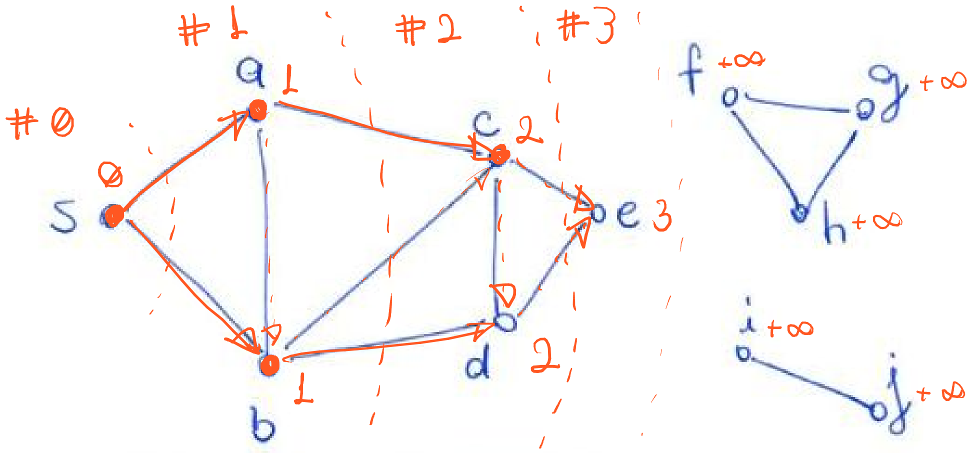
fila | ~~4~~ 3 1 5

- Depois de alcançar todas os vértices,
    - ou quando a fila ficar vazia, podemos parar.

Pseudocódigo:

```
distâncias (G=(V,E), s)
    marque todo v ∈ V com dist[v] = +∞
    dist[s] = 0
    coloque s na fila Q
    enquanto Q ≠ ∅:
        remova v do início de Q
        para cada aresta (v,w)
            se dist[w] = +∞
                dist[w] = dist[v] + 1
                insira w no final de Q
```

Exemplo 2: Observem o momento em que uma camada é concluída.



Fila | ~~s~~ ~~a~~ ~~b~~ ~~c~~ ~~d~~ ~~e~~

Suponha que s é a origem

Vamos mostrar que nosso algoritmo calcula corretamente

- a distância não ponderada de s até cada vértice v.
  - Para tanto, vamos usar indução matemática no número de iterações.

comp. do menor caminho

H.I.: Para todo vértice v encontrado até o início da iteração atual

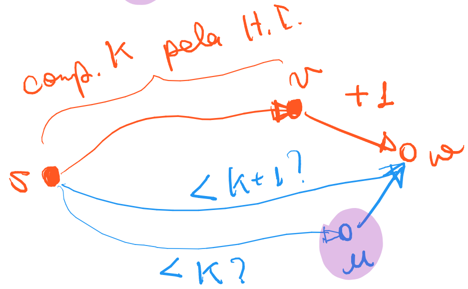
- temos que dist[v] é a distância de s até v.

Além disso, os vértices são encontrados em ordem crescente de distância

Caso base: No início da primeira iteração apenas s foi encontrado e dist[s] = 0, que é a menor distância

Passo: Queremos mostrar que a H.I. continua válida no final da iteração atual

  - depois que encontramos novos vértices.
- Suponha que na iteração atual o algoritmo visita o vértice v,
  - que tem distância dist[v] = k.
- Ao analisar os vizinhos de v encontramos, pela primeira vez,
  - o vértice w e atribuímos dist[w] = k + 1.



- Nosso objetivo é mostrar que k + 1 é a distância de s até w.
- Pela hipótese de indução,
  - temos um caminho de s até v com comprimento k.
- Portanto, existe um caminho de s até w com comprimento k + 1.
- Mas, como garantir que esse é um caminho mínimo de s a w?
  - Por que não pode haver um caminho de comprimento menor?

fortalecer a H.I.

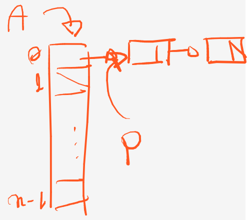
Se existir u c/ arco (u,w) e dist[u] < K
então, pela H.I., u teria sido encontrado antes de v
e, pelo func. do alg, u teria sido visitado antes de v.
Portanto, w teria sido encontrado antes da iteração atual (contradição).
Assim, concluímos que u não existe e que distância de s até w é K+1.

Como w tem distância K+1, precisamos mostrar que todo vértice c/ distância < K+1 já foi encontrado.
Pela H.I., no início da iteração todo vértice havia sido encontrado em ordem crescente de distância.

pela H.I.

Como v tem distância K, sabemos que todo vértice c/ distância < K foi encontrado antes de v. Pelo funcionamento do alg., sabemos que todo vértice c/ distância < K foi visitado antes de v.
Assim, todo vértice c/ distância < K+1 foi encontrado antes de w ser encontrado.

Código cálculo de distâncias com grafo implementado por listas de adjacência.




```c
int *distancias(Grafo G, int origem) {
    int v, w, *dist;
    Fila *fila;
    Noh *p;
    dist = malloc(G->n * sizeof(int));
    fila = criaFila(G->n);
    /* inicializa todos como não encontrados, exceto pela origem */
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        dist[v] = -1;
    dist[origem] = 0;
    insereFila(fila, origem);
    while (!filaVazia(fila)) {
        v = removeFila(fila);
        /* para cada vizinho de v que ainda não foi encontrado */
        p = G->A[v];
        while (p != NULL) {
            w = p->rotulo;
            if (dist[w] == -1) {
            /* calcule a distância do vizinho e o coloque na fila */
                dist[w] = dist[v] + 1;
                insereFila(fila, w);
            }
            p = p->prox;
        }
    }
    fila = liberaFila(fila);
    return dist;
}
```

$O(n)$

s

$O(n_s)$

$O(|\delta(v)|)$

$$\sum_{v \in n_s} |\delta(v)| = m_s$$

- Qual a eficiência deste algoritmo?
    - O(n + n_s + m_s), sendo s o vértice origem. Por que?

Quiz1: Considerem o grafo de uma grande rede social,

- com mais ou menos 10^9 vértices
    - e 10^3 arestas por vértice (grau médio dos vértices).
- Supondo que o grafo da rede social é conexo,
    - compare a eficiência de um algoritmo de cálculo de distâncias
    - que usa matriz de adjacência com um que usa listas de adjacência.
- Dica: lembre que, no caso da matriz de adjacência,
    - o algoritmo leva tempo O(n) para avaliar os vizinhos de cada vértice.

Funções para ler grafos

Quiz2: Compare a eficiência das seguintes funções para leitura de grafos.

Função auxiliar para ler de arquivo grafo representado por matriz binária

```
Grafo lerGrafoMatriz(FILE *entrada) {
    int n, v, w, value;
    Grafo G;
    fscanf(entrada, "%d\n", &n);
    G = inicializaGrafo(n);
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        for (w = 0; w < G->n; w++) {
            fscanf(entrada, "%d", &value);
            if (value == 1)
                insereArcoNaoSeguraGrafo(G, v, w);
        }
    return G;
}
```

n

n linhas

0 1 1 ... 0
1 0 0 ... 1
⋮
1 1 0 ... 0

n colunas

Função auxiliar para ler de arquivo grafo em listas gerado por imprimeGrafo

```
Grafo lerGrafoImpresso(FILE *entrada) {
    int n, m, v, w;
    Grafo G;
    fscanf(entrada, "%d %d\n", &n, &m);
    G = inicializaGrafo(n);
    for (v = 0; v < G->n; v++) {
        fscanf(entrada, "%d", &w);
        while (w != -1) {
            insereArcoNaoSeguraGrafo(G, v, w);
            fscanf(entrada, "%d", &w);
        }
    }
    return G;
}
```

n m

n linhas

2 5 -1
3 14 30 -1
54 0 -1
⋮
2 5 0 -1

Função auxiliar para ler de arquivo grafo em listas gerado por mostraGrafo

```
Grafo lerGrafoMostra(FILE *entrada) {
    int n, m, v, w, tam;
    Grafo G;
    char *str, *aux;
    fscanf(entrada, "%d %d\n", &n, &m);
    G = inicializaGrafo(n);
    tam = ((G->n * ((int)log10((double)G->n) + 1)) + 3) *
sizeof(char); // Quiz3: o que justifica cada termo dessa expressão?
    str = malloc(tam);
    for (v = 0; v < G->n; v++) {
        fgets(str, tam, entrada);
        aux = strtok(str, ":");
        aux = strtok(NULL, " \n");
        while (aux != NULL) {
            w = atoi(aux);
            insereArcoNaoSeguraGrafo(G, v, w);
            aux = strtok(NULL, " \n");
        }
    }
    free(str);
    return G;
}
```

lê a entrada até encontrar \n ou fim de arquivo ou depois de ler tam-1

" " ou "\n"

n m

n linhas

0 : 1 2 54
1 : 0 13 25
2 : 4 0
⋮
n-1: 42 1

Uma outra maneira comum para armazenar grafos em arquivos é

- uma linha com dois números n e m,
    - indicando o número de vértices e de arestas, respectivamente,
- seguida por m linhas, cada uma com um par u e v em {0, ..., n-1},
    - com cada par indicando um arco do vértice u para o vértice v.
- Quiz4: implementem um leitor de grafos que utiliza esse padrão.

n m

m linhas

1 2 ?
42 3 ?
57 100 ?
⋮

(1, 2)