AED2 - Aula 11
Problema da separação e quickSort

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

- Dividir: o problema é dividido em subproblemas menores do mesmo tipo.
- Conquistar: os subproblemas são resolvidos recursivamente, sendo que os subproblemas pequenos são casos base.
- Combinar: as soluções dos subproblemas são combinadas numa solução do problema original.

Ideia e exemplo

- Separar o vetor entre os elementos maiores e menores.
    - Então, ordenar recursivamente cada subvetor resultante da separação
- Como exemplo, considere o seguinte vetor:

7	5	2	3	9	8

- Separar entre elementos menores e maiores.

5	2	3

9	7	8

- Ordenar cada subvetor recursivamente (lembrar dos casos base).

2	3	5

7	8	9

- a simples concatenação dos subvetores corresponde à solução.

Dificuldade: Como definir os maiores e os menores?

- Num algoritmo de ordenação baseado em comparações
    - só podemos falar de menor ou maior relativo a outro elemento.
- Por isso, usaremos um elemento do vetor como referência,
    - que chamaremos de pivô.
- Depois veremos como escolher esse elemento adequadamente.

Código quickSort recursivo:

```
// p indica a primeira posição e r a última
void quickSortR(int v[], int p, int r) {
    int i;
    if (p < r) { // se vetor corrente tem mais de um elemento
        i = separa2(v, p, r); // i é posição do pivô após separação
        quickSortR(v, p, i - 1);
        quickSortR(v, i + 1, r);
    }
}
```

p i r

v | <c | >c |

1° subvetor

2° subvetor

c é o valor do pivô

Curiosidade: note que a maior parte do trabalho é feita pela função de separação,

- na fase de divisão, que ocorre antes das chamadas recursivas.

Isso é complementar ao algoritmo mergeSort,

- que realiza a maior parte do trabalho na fase de combinação das soluções,
    - através da função de intercalação.

Por isso, podemos dizer que o mergeSort ordena o vetor “de baixo para cima”,

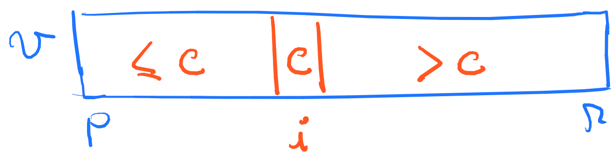
- enquanto o quickSort o ordena “de cima para baixo”.
- Isso fica mais claro se considerarmos a execução dos algoritmos
    - ilustrada numa árvore de recursão.

Assim como o algoritmo para o problema da intercalação é central no mergeSort,

- o algoritmo para o problema da separação é central no quickSort.
- Vamos entender melhor esse problema e projetar algoritmos para ele.

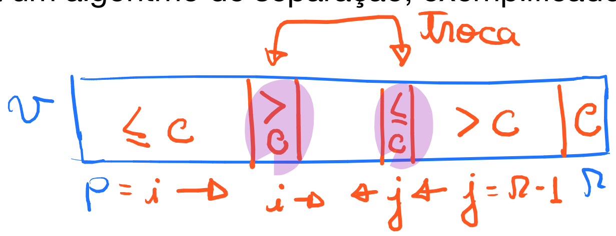
Problema da separação

- Receba como entrada um vetor v[p .. r],
    - e um pivô c, que é elemento de v[p .. r].
- O objetivo é separar os elementos do vetor de modo que
    - o prefixo deste tenha os elementos <= c,
    - e o sufixo tenha os elementos > c.



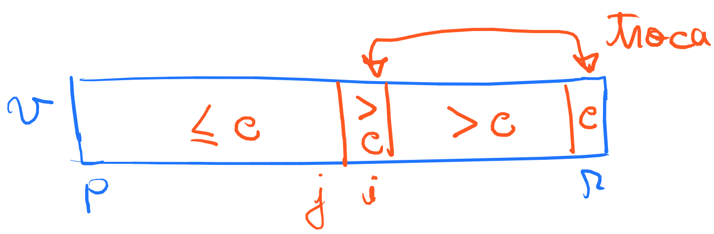
- Isto é, c deve terminar numa posição i tal que $v[p..i-1] \leq c = v[i] > v[i+1..r]$
- Note que, c termina na posição que ele deve ocupar no vetor ordenado.

Ideia para um algoritmo de separação, exemplificado na seguinte figura,



consiste de:

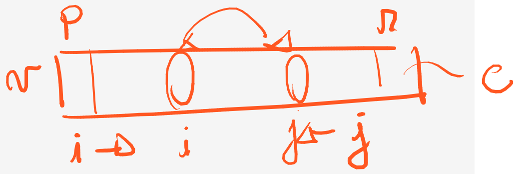
- Escolher o pivô c = v[r].
- Começar com um índice i em p e ir incrementando-o enquanto v[i] <= c.
- Começar com outro índice j em r - 1 e ir decrementando-o enquanto v[j] > c.
- Quando ambos os índices param de avançar, temos
    - v[i] > c e v[j] <= c.
- Neste caso, troca v[i] com v[j] e volta a avançar os índices.
- Para o processo quando i >= j,
    - caso em que fazer a troca não tem mais sentido.

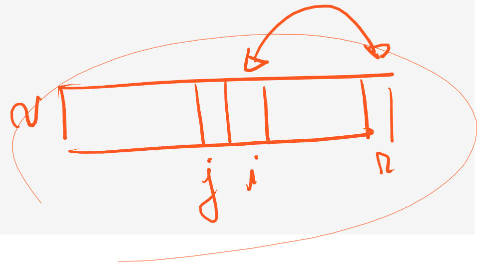


- Então troca v[i] com v[r]
    - e devolve i.

Código do primeiro algoritmo da separação:

```
// separa v[p .. r] e devolve a posição do pivô
int separa1(int v[], int p, int r) {
    int i = p, j = r - 1, c = v[r]; // c é o pivô
    while (1) {
        while (i < r && v[i] <= c) i++;
        while (j > i && v[j] > c) j--;
        if (i >= j) break;
        troca(&v[i], &v[j]);
        // i++; j--;
    }
    troca(&v[i], &v[r]);
    return i;
}
```





Invariantes e corretude do separa1:

- No início de cada iteração do laço temos
  - a) v[p .. r] é uma permutação do vetor original,
  - b) v[p .. i - 1] <= c, — prefixo tem os menores elementos
  - c) v[j + 1 .. r - 1] > c, — "sufixo" tem os maiores "
  - d) c = v[r].
- Note que, quando o algoritmo sai do laço principal temos i >= j.
  - Portanto, todo o vetor está separado, exceto por c na posição r,
    - i.e., $v[p..i-1] \leq c = v[r] < v[i..r-1]$
  - de modo que v[i] é o elemento mais à esquerda que é maior do que c.
- Assim, trocando v[i] com v[r] chegamos à solução.

Eficiência de tempo do separa1:

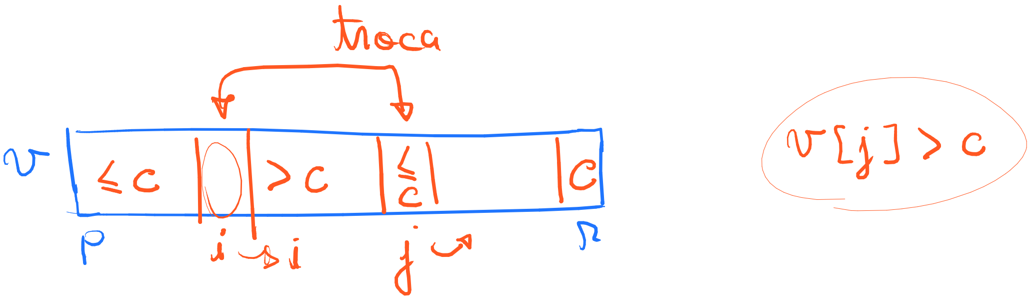
- O número de operações é linear no tamanho do subvetor, i.e., O(r - p),
  - apesar dos laços aninhados sugerirem comportamento quadrático.
- Para verificar isso, note que no início i = p e j = r - 1,
  - e em cada iteração dos laços internos
    - i é incrementado ou j é decrementado.
  - Assim, o número de iterações de ambos esse laços é $(i-p)+(r-1-j)$
- Note também que o laço principal termina quando i >= j.
  - Assim, considerando que o laço terminou com i = j + 1 temos
    - # de iterações = $(i-p)+(r-1-j) = \cancel{j}+\cancel{1}-p+r-\cancel{1}-\cancel{j} = r-p$

Eficiência de espaço do separa1:

- O(1), pois o número e tamanho das variáveis auxiliares é constante
  - em relação ao tamanho do vetor de entrada.

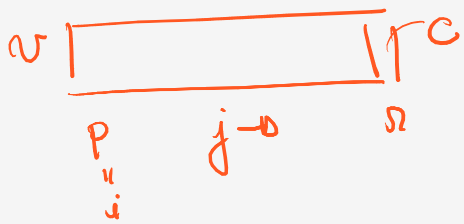
Curiosidade: Temos uma outra maneira de resolver o problema da separação,

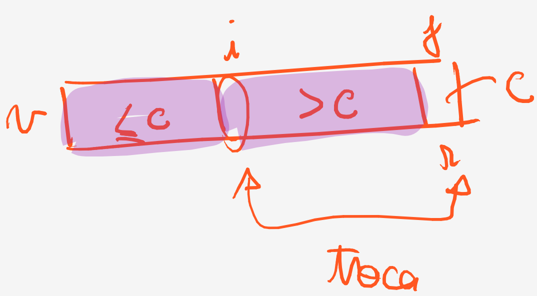
- que é exemplificada na seguinte figura



Código do segundo algoritmo da separação:

```c
// separa v[p .. r] e devolve a posição do pivô
int separa2(int v[], int p, int r) {
    int i, j, c = v[r]; // c é o pivô
    i = p;
    for (j = p; j < r; j++)
        if (v[j] <= c) {
            troca(&v[i], &v[j]);
            i++;
        }
    troca(&v[i], &v[r]);
    return i;
}
```





Invariantes e corretude do separa2:

- No início de cada iteração do laço temos
  - a) v[p .. r] é uma permutação do vetor original,
  - b) v[p .. i - 1] <= c,
  - c) c < v[i .. j - 1],
  - d) v[r] = c,
  - e) p <= i <= j <= r.
- Note que, como ao fim da última iteração j = r,
  - os invariantes implicam que a separação é realizada corretamente,
    - i.e., $v[p .. i-1] \leq c = v[r] < v[i .. r-1]$
- faltando apenas trocar o elemento em v[i] com v[r] e devolver i.

Eficiência de tempo do separa2:

- O número de operações é linear no tamanho do subvetor sendo intercalado,
  - ou seja, O(r - p).
- Para verificar isso, note que o laço realiza r - p iterações,
  - realizando trabalho constante em cada iteração.

Eficiência de espaço do separa2:

- O(1), pois o número e tamanho das variáveis auxiliares é constante
  - em relação ao tamanho do vetor de entrada.

Relembrando o código do quickSort:

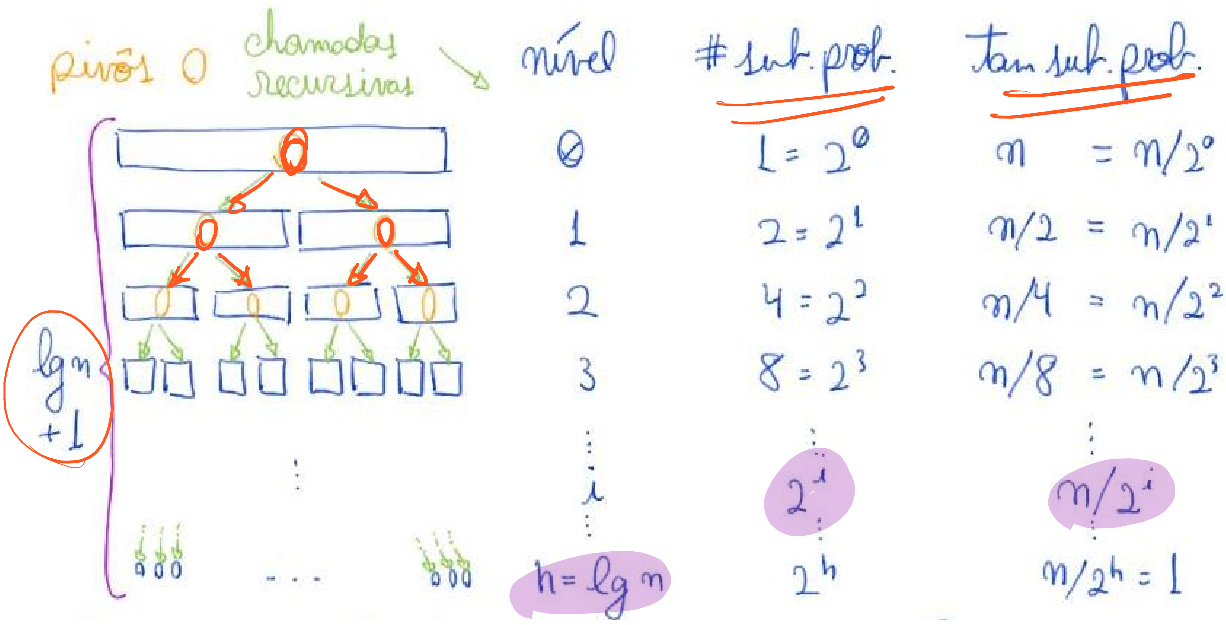
```
// p indica a primeira posicao e r a ultima
void quickSortR(int v[], int p, int r) {
    int i;
    if (p < r) { // se vetor corrente tem mais de um elemento
        i = separa2(v, p, r); // i é posição do pivô após separação
        quickSortR(v, p, i - 1);
        quickSortR(v, i + 1, r);
    }
}
```

Eficiência de tempo do quickSort depende de quão bem o vetor é dividido.

- Por isso, vamos comparar melhor caso, pior caso e caso médio.

Melhor caso:

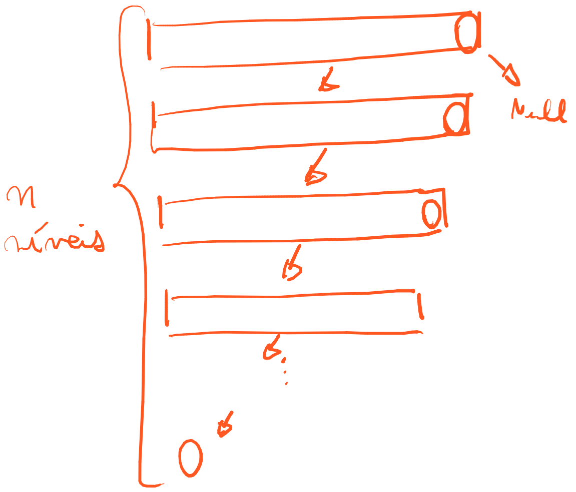
- Pivô sempre divide o vetor ao meio e número de operações é O(n lg n).
- Para chegar a esse resultado, construa uma árvore de recursão



    - e observe que no nível i temos
        - 2^i subproblemas
        - e o vetor de cada subproblema tem tamanho n / 2^i.
- Como o trabalho das funções de separação
    - é linear no tamanho do vetor de entrada
        - o trabalho por subproblema do nível i é $z \cdot n/2^i$
            - para alguma constante z.
- Assim, trabalho total no nível i é $\cancel{2^i} \cdot z \cdot \frac{n}{\cancel{2^i}} = z \cdot n$
    - i.e., o trabalho é proporcional a n em todo nível.
- Como, no último nível h, por conta do caso base,
    - o tamanho dos subproblemas é 1,
        - temos n / 2^h = 1 ⇒ 2^h = n ⇒ h = lg n.
- Portanto, o número de níveis é (1 + lg n),
    - já que começamos a contar os níveis em 0.
- Por fim, Trabalho Total = $z \cdot n \cdot (1 + \lg n) = O(n \lg n)$

Pior caso:

- Pivô sempre é o menor ou maior elemento do vetor
  - e número de operações é O(n^2).
- Para chegar a esse resultado, observe que cada chamada recursiva
  - terá apenas um subproblema não trivial (tamanho vetor > 0)
  - e o vetor deste subproblema não trivial
    - será apenas uma unidade menor que o anterior.



nível	# sub. prob.	tam sub. prob.
0	1	$n - 0$
1	1	$n - 1$
2	1	$n - 2$
3	1	$n - 3$
⋮	⋮	⋮
i	1	$n - i$

- Assim, teremos sempre 1 subproblema por nível
  - e o tamanho do subproblema no nível i será n - i.
- Por isso, o trabalho no nível i será $z \cdot (n - i)$
  - para alguma constante z.
- O total de níveis será n, já que no último nível h temos
  - tamanho do subproblema = $1 = n - h \Rightarrow h = n - 1$
    - e começamos a contar os níveis em 0.
- Assim, o trabalho total será a soma dos termos de uma PA

$$z(n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1) = z(n+1)\frac{n}{2} \approx z \cdot \frac{n^2}{2} = O(n^2)$$

Caso médio:

- Quando lidando com vetores que são permutações aleatórias,
  - o número de operações fica próximo do melhor caso, i.e., O(n lg n).
- Pense que, por simetria, cada pivô tem a mesma chance
  - de ser um elemento grande ou pequeno.
- No entanto, a eficiência do quickSort determinístico
  - depende da entrada ter uma distribuição de valores favorável.
- Para não depender disso, podemos aleatorizar a escolha do pivô.
  - Com a aleatorização o tempo esperado do algoritmo é O(n lg n).
- Importante destacar que, no caso do algoritmo aleatorizado
  - a eficiência depende apenas de suas escolhas aleatórias,
    - e não da configuração do vetor de entrada.

Uso da aleatoriedade

Código quickSort recursivo aleatorizado:

```
// p indica a primeira posicao e r a ultima
void quickSortRAleat(int v[], int p, int r) {
    int desl, i;
    if (p < r) {
        // desl = rand() % (r - p + 1);
        desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r
- p + 1));
        troca(&v[p + desl], &v[r]);
        i = separa1(v, p, r);
        quickSortRAleat(v, p, i - 1);
        quickSortRAleat(v, i + 1, r);
    }
}
```

v[p..r]

opção 1

opção 2

desl

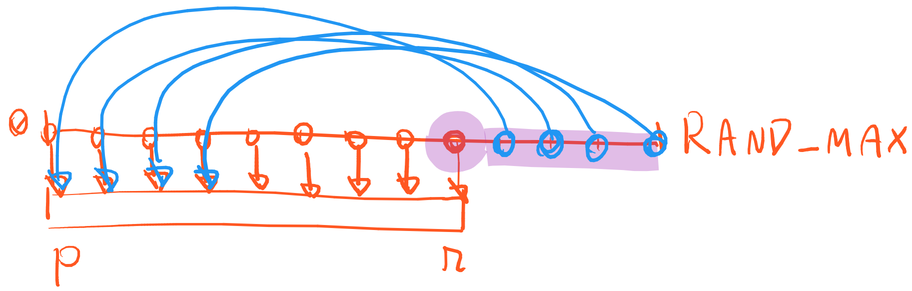
Funções de aleatorização:

- A função rand( ), definida na biblioteca stdlib.h,
    - gera um número inteiro pseudo-aleatório
        - no intervalo [0 .. RAND_MAX].
- Primeira opção

tamanho do vetor

```
    desl = rand() % (r - p + 1);
```

- Obtém um número inteiro no intervalo [0, r - p], que corresponde
    - ao resto da divisão de um inteiro aleatório por (r - p + 1).
- No entanto, possui um viés que privilegia números pequenos,
    - especialmente se (r - p + 1) tem magnitude de RAND_MAX.



- Segunda opção

```
    desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (r - p + 1));
```

- Analisando por partes, primeiro transforma o inteiro aleatório,
    - obtido de rand( ), em um número real no intervalo [0, 1)

```
    ((double)rand() / (RAND_MAX + 1))
```

- Depois, transforma esse real
    - em um número real no intervalo [0, r - p + 1)

```
    (((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r - p + 1))
```

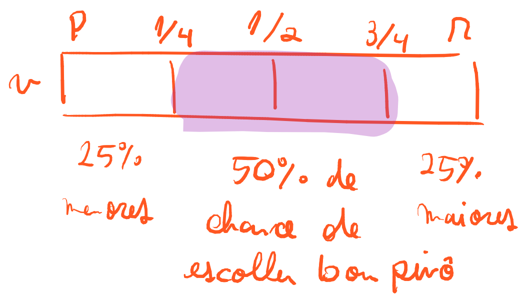
- Então, transforma esse real num inteiro no intervalo [0, r - p]
    - pois a conversão (int) trunca o valor alvo

```
    (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r - p + 1))
```

inteiro [0, r-p]

Eficiência de tempo esperada do quickSort aleatorizado:

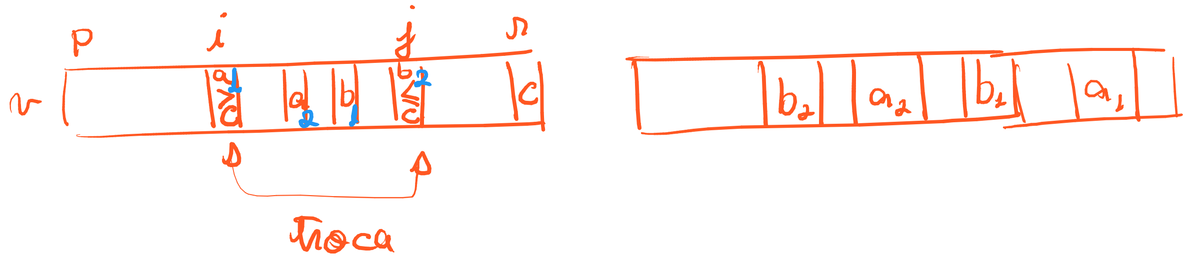
- Como dito antes, é da ordem de n lg n, i.e., O(n lg n).
- Numa análise superficial, isso ocorre porque, em média,
    - a cada duas escolhas aleatórias do pivô, será escolhido
        - um pivô “bom”, que divide o vetor próximo da metade.



-
    - É um cenário parecido com, a cada dois lances de moeda,
        - se espera obter uma cara.
- Com um pivô “bom” a cada dois, o resultado será uma árvore
    - parecida com a do melhor caso,
        - mas com um pouco mais que o dobro de níveis.
    - Aproximadamente 3,41 * (lg n + 1) níveis.

Estabilidade:

- Ordenação do quickSort não é estável,
    - i.e., ele pode inverter a ordem relativa de elementos iguais.
- Isto acontece porque a rotina de separação troca elementos,
    - nas posições i e j, que estão separados por um intervalo.



- Assim, se existir um elemento x nesse intervalo, tal que x = v[i] ou x = v[j],
    - a ordem relativa destes elementos será invertida.

Eficiência de espaço do quickSort recursivo:

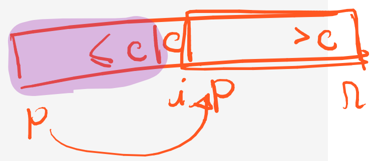
- quickSort não usa vetor auxiliar, o que levaria a classificá-lo como in place.
- No entanto, cada nova chamada recursiva
    - ocupa um pouco de memória da pilha de execução.
- Assim, quickSort ocupa memória adicional
    - proporcional à altura da pilha de execução,
        - que é igual à altura (número de níveis)
            - das árvores de recursão em nossas análises.
    - Ou seja, altura = O(n) no pior caso e altura = O(lg n) nos demais casos.
- Portanto, o uso de memória cresce de acordo com o tamanho da entrada.
    - Por isso, quickSort não é propriamente in place.
- O uso de memória adicional proporcional a lg n não costuma ser crítico.
- Já, pilhas de execução de altura proporcional a n
    - podem dar problema em caso de n grande.

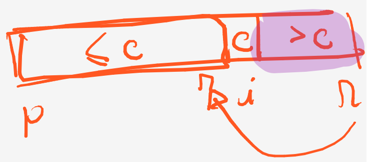
Bônus: melhorando a eficiência de espaço.

- Uma alternativa para garantir que o quickSort,
  - tanto na versão determinística quanto na probabilística,
- nunca chegue a produzir uma pilha de execução maior que lg n
  - é sempre fazer a primeira chamada recursiva no menor subvetor,
    - que terá tamanho <= que metade do vetor anterior
  - e substituir a segunda chamada recursiva por uma versão iterativa.
- Vale destacar que isso só é possível porque
  - a segunda chamada recursiva do quickSort
    - é a última operação realizada na função.
- Isso caracteriza um caso de recursão caudal, a qual
  - pode ser convertida sistematicamente em um algoritmo iterativo.
- Para tanto, é introduzido um laço principal e
  - onde estaria a segunda chamada recursiva, é feita a atualização
    - dos índices para corresponderem ao novo subvetor.

O seguinte algoritmo implementa essa ideia na versão determinística do quickSort:

```
void quickSortRSemiIter(int v[], int p, int r) {
    int i;          Caso base
    while (p < r) {
        i = separa1(v, p, r);
        if (i - p < r - i) { // se o subvetor esquerdo é menor
            quickSortRSemiIter(v, p, i - 1);
            p = i + 1;
        }
        else { // se o subvetor direito é menor
            quickSortRSemiIter(v, i + 1, r);
            r = i - 1;
        }
    }
}
```





Exercício:

- Uma última observação é que a eficiência do quickSort
  - pode ser comprometida se houverem muitos elementos repetidos.
- Nesse caso, mesmo a versão aleatorizada pode escolher muitos pivôs ruins.
  - Parte 1: construa um cenário em que isso acontece com quickSortR.
- Para evitar esse problema usamos o 3-way quickSort,
  - que divide o vetor entre menores, iguais e maiores que o pivô.
    - Parte 2: implemente essa versão do quickSort.

Animação:

- Visualization and Comparison of Sorting Algorithms - www.youtube.com/watch?v=ZZuD6iUe3Pc