

AED1 - Aula 23

Filas de prioridade: implementações básica e com heap

Filas de prioridade são um tipo abstrato de dados

- em que cada elemento está associado a um valor,
 - que indica sua prioridade,
- e que generaliza tanto filas quanto pilhas.

Uma fila de prioridades suporta operações de:

- inserção de um elemento com um certo valor de prioridade,
- edição da prioridade de um elemento (operação menos comum),
- remoção do elemento com maior (ou menor) prioridade.
 - Esta operação não atende maior e menor simultaneamente.
 - Por isso temos filas de prioridade de máximo e de mínimo.

Para simplificar, ao longo desta aula

- vamos supor que o valor de cada elemento corresponde a sua prioridade,
- e vamos focar na versão de máximo da fila de prioridade.
 - Destacamos que é simples transformar a implementação
 - de uma fila de prioridade de máximo
 - em uma fila de prioridade de mínimo.

Conhecendo a definição e operações suportadas por uma fila de prioridade,

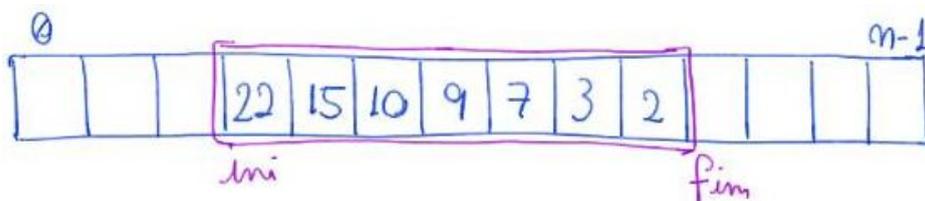
- como definir as prioridades dos elementos,
 - para que uma fila de prioridade se comporte como uma fila?
 - E para que ela se comporte como uma pilha?

Implementação básica de uma fila de prioridade

Esta implementação utiliza ideias

- da nossa implementação de fila em vetor

Exemplo:



Tamanho

- $\text{tam} = \text{fim} - \text{ini};$

Remoção do elemento máximo

```
x = q[ini++];
```

- Leva tempo constante, i.e., $O(1)$.

Inserção de um elemento x

```
for (int i = fim - 1; i >= ini && v[i] < x; i--)
```

```
    v[i + 1] = v[i];
```

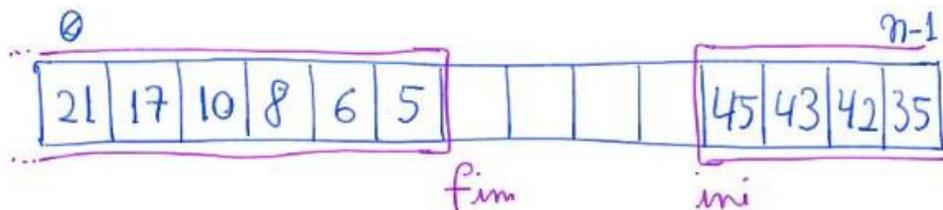
```
    v[i + 1] = x;
```

```
    fim++;
```

- Note que, esta operação lembra o laço interno do insertionSort.
- Ela leva tempo proporcional a tam no pior caso, i.e., $O(\text{tam})$.

Implementação básica de uma fila de prioridade de máximo

- baseada na implementação de fila em vetor circular



Remoção e, principalmente, inserção passam a ter mais detalhes,

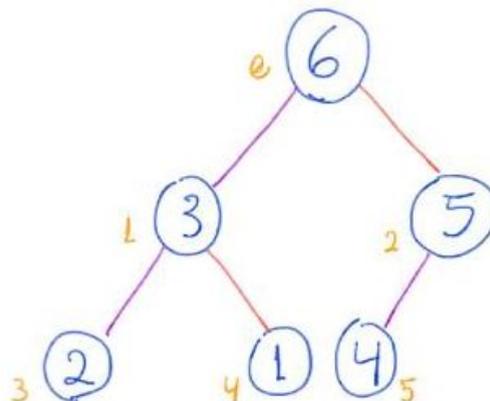
- mas a eficiência da primeira continua constante
 - e da segunda continua proporcional ao número de elementos, i.e., tam.

Será que podemos fazer melhor?

Implementação de uma fila de prioridade usando Heap

Heap é uma estrutura de dados eficiente para implementar Filas de Prioridades.

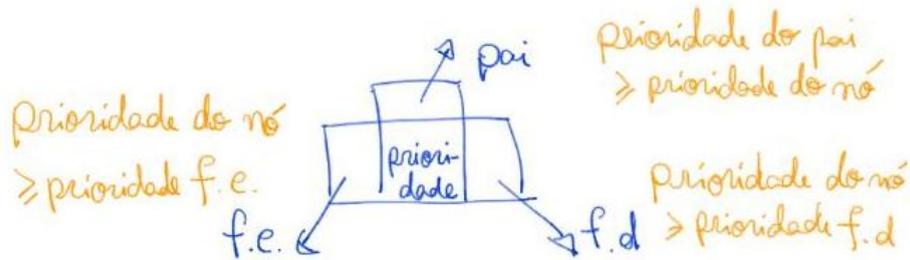
Exemplo de um heap de máximo:



Um heap de máximo é

- uma árvore binária completa ou quase-completa,

- cujos nós respeitam a propriedade do heap de máximo, i.e.,
 - o valor da prioridade de um nó é \geq que a prioridade de seus filhos.



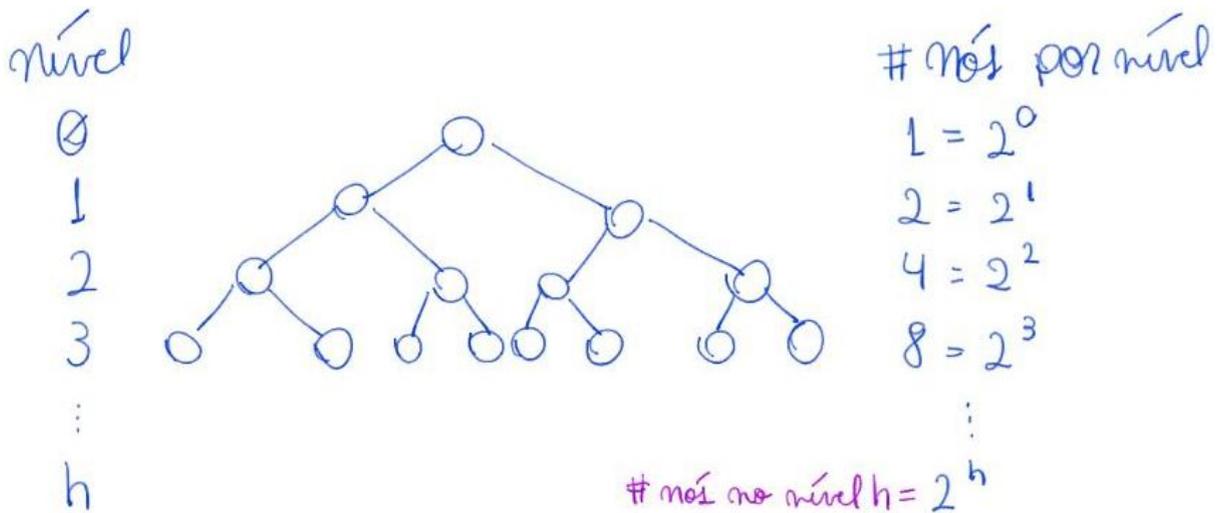
- Note que essa propriedade difere da propriedade de busca em árvores.
 - Em particular, ela não nos permite comparar os valores
 - de um filho esquerdo e de um filho direito.

Numa árvore binária completa

- cada nível p tem 2^p nós.
- Lembrando que a raiz fica no nível 0
 - e que o nível aumenta cada vez que
 - vamos de um nó para seu filho esquerdo ou direito.

Quantos nós tem uma árvore binária completa com h níveis?

- O número de nós $n = 2^{(h+1)} - 1$.
- Para entender o porquê, vamos analisar quantitativamente tal árvore.



Seja n o # total de nós da árvore

$$n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^h$$

(a) $n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^h$

(b) $2 \cdot n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^h + 2^{h+1}$

Subtraindo (a) de (b) temos:

$$(2-1)n = (2^1 + \dots + 2^h + 2^{h+1}) - (2^0 + 2^1 + \dots + 2^h)$$

$$n = 2^{h+1} - 1$$

Calculando a soma dos termos de uma PG de razão 2

Numa árvore binária quase completa

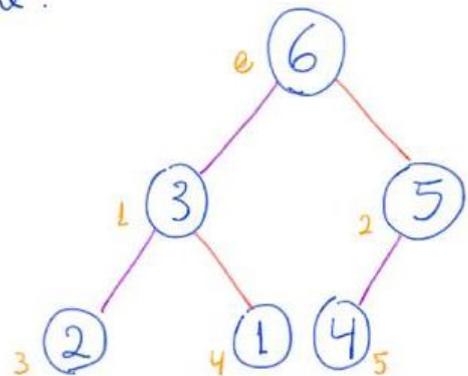
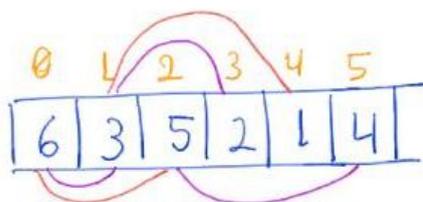
- cada nível p tem 2^p nós,
 - com a possível exceção do último nível.
- Se for esse o caso, no último nível as posições dos nós
 - são preenchidas da esquerda para a direita, sem espaços vazios.

O fato do heap ser uma árvore binária quase completa,

- permite que ele seja implementado em um vetor,
 - como mostra o seguinte exemplo:

- Exemplo de heap na visão de:

- árvore binária
- linearizado em vetor



- Em tal implementação o vetor é preenchido da esquerda para a direita,
 - e os nós da árvore são contados/numerados de cima para baixo
 - e, em cada nível, também da esquerda para a direita.
- Desse modo, o número associado a cada nó da árvore
 - corresponde a seu índice no vetor.

De modo geral, implementamos um heap com m elementos

- em um vetor v que começa em 0 e vai até $m - 1$.
- Para tanto, dado um elemento na posição i ,
 - é essencial saber quem é pai, filho esquerdo e filho direito de i .
- Para tanto, podemos usar as seguintes fórmulas:

```
#define PAI(i) ((i - 1) / 2)
```

```
#define FILHO_ESQ(i) (2 * i + 1)
```

```
#define FILHO_DIR(i) (2 * i + 2)
```

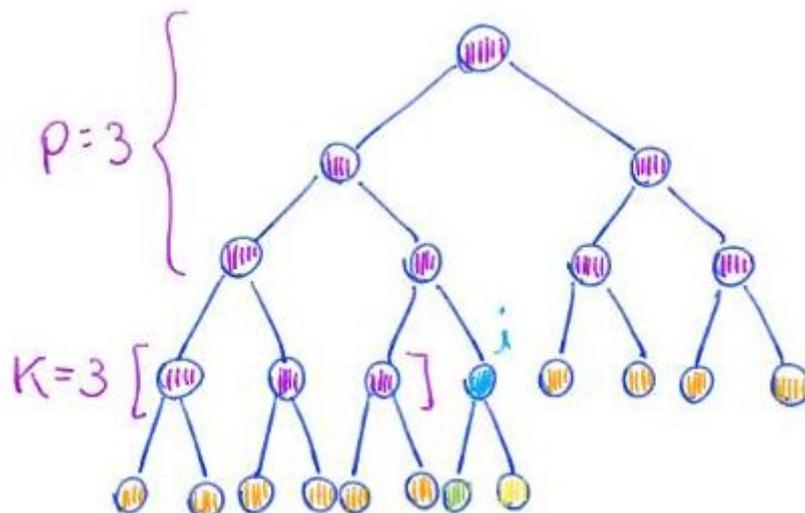
- Observe que elas funcionam corretamente
 - no heap do exemplo anterior.

Traduzindo a propriedade do heap de máximo

- para a implementação em vetor temos
 - $v[\text{PAI}(i)] = v[(i - 1) / 2] \geq v[i]$
 - $v[i] \geq v[2 * i + 1] = v[\text{FILHO_ESQ}(i)]$
 - $v[i] \geq v[2 * i + 2] = v[\text{FILHO_DIR}(i)]$
- Observe que, o nó raiz, que não tem pai, fica na posição 0.
- Além disso, se $\text{FILHO_ESQ}(i)$ ou $\text{FILHO_DIR}(i)$ forem $\geq m$,
 - então i não tem filho esquerdo ou direito, respectivamente.
- Note que os nós da segunda metade do vetor não tem filhos, já que
 - para $i \geq m / 2$ temos $\text{FILHO_ESQ}(i) = 2 * i + 1 \geq 2 * m / 2 + 1 \geq m$.
- De fato, em um heap (e em toda árvore binária quase completa),
 - o número de folhas (nós sem filhos) é pelo menos metade do total.

Para obter uma intuição do porque o índice de um nó i

- é aproximadamente metade do índice de seus filhos, observe que,
 - numa árvore binária quase completa o número de nós antes de i é
 - aproximadamente igual ao número de nós entre i e seus filhos.
- Para uma explicação mais precisa, considere a análise do seguinte exemplo:



elementos antes de i

$$10 = 7 + 3 = (2^3 - 1) + 3 = (2^p - 1) + K$$

$$i = (2^p - 1) + K \text{ (índices começam em 0)}$$

elementos depois de i

$$10 = 4 + 6$$

$$= (2^3 - 3 - 1) + 2 \cdot 3$$

$$= (2^p - K - 1) + 2K = 2^p + K - 1$$

$$fe(i) = (2^p + K - 1) + 1 + (2^p + K - 1)$$

$$= 2i + 1$$

Queremos descobrir a altura de uma árvore binária quase completa com m nós,

- ou, de modo equivalente,
 - o número de níveis que um heap com m elementos possui,
- pois isso será relevante para entender
 - a eficiência de operações que manipulam um heap.

Para tanto, vamos considerar algumas questões:

- Quantos nós cabem no nível h de uma árvore binária completa?
 - Já vimos que são 2^h nós.
- Quantos nós cabem numa árvore binária completa com h níveis?
 - Também já vimos que são $2^{(h+1)} - 1$ nós.
- Lembre que a numeração dos nós da árvore,
 - que corresponde aos índices do vetor,
 - começa em 0 na raiz,
 - aumenta de cima para baixo nos níveis,
 - e, em cada nível, aumenta da esquerda para a direita.
- Quais os possíveis índices dos nós do nível h ?
 - São inteiros no intervalo $[2^h - 1, 2^{(h+1)} - 2]$.
 - Isso porque, com $2^{(h+1)} - 1$ nós na árvore e contando a partir de 0,

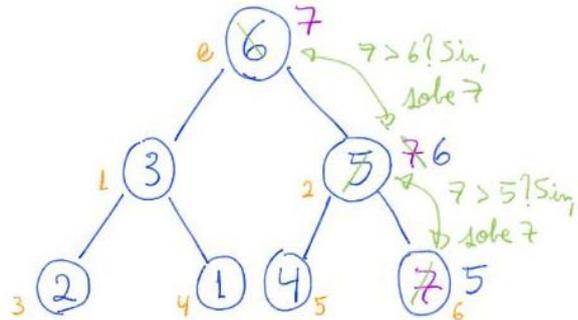
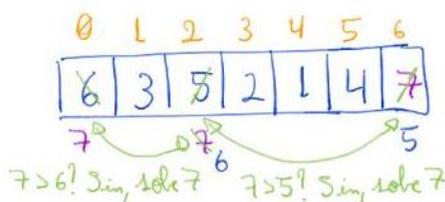
- o último elemento tem índice $2^{(h + 1)} - 2$,
 - e o primeiro elemento do nível h tem índice
 - $2^{(h + 1)} - 2 - 2^h + 1 = 2^h + 2^h - 1 - 2^h = 2^h - 1$.
 - Qual o nível do último nó da árvore, que tem índice m - 1?
 - h = piso(lg m), pois
 - $2^h - 1 \leq m - 1 \leq 2^{(h + 1)} - 2$
 - $2^h \leq m \leq 2^{(h + 1)} - 1$
 - $2^h \leq m < 2^{(h + 1)}$
 - $h \leq \lg(m) < h + 1$
 - Portanto, o número de níveis de um heap com m elementos é **piso(lg m)**.
 - Note que, se trocarmos m - 1 pelo índice i de um nó qualquer,
 - conseguimos obter o nível deste usando o mesmo raciocínio,
 - i.e., o nível de i é piso(lg (i + 1)).

Agora vamos estudar as duas funções mais importantes para manutenção do heap.

Sobe Heap

- Veremos esta função aplicada à inserção de um novo elemento no heap,
 - que é seu uso mais comum.
- Também a utilizaremos para construir um heap a partir de um vetor.

- Exemplo de inserção no heap usando função sobe heap



Código da sobeHeap:

```
void sobeHeap(int v[], int m)
{
    int f = m;
    while (f > 0 && v[PAI(f)] < v[f])
    {
        troca(&v[f], &v[PAI(f)]);
        f = PAI(f);
    }
}
```

- Exemplo de uso da sobeHeap:

```
printf("Testando sobeHeap com elemento da ultima posicao\n");
```

```
sobeHeap(v, m - 1);
```

Corretude e invariante da `sobeHeap`:

- o invariante principal que vale no início de cada iteração é
 - todo elemento em $v[0 .. m]$ respeita a propriedade do heap,
 - exceto, possivelmente, pelo elemento f .
 - Isto é, $v[i] \leq v[\text{PAI}(i)] = v[(i - 1) / 2]$ vale para todo $i \neq f$.

Eficiência da `sobeHeap`:

- número de operações é $O(\lg m)$,
 - pois no início $f = m$ e em cada iteração f é dividido por 2.

A seguir apresentamos o código da função **`insereHeap`**,

- que implementa uma das operações fundamentais da fila de prioridade.
- Esta função coloca o novo elemento na próxima posição disponível no vetor,
 - e invoca `sobeHeap` para restabelecer a propriedade do Heap.
 - Por isso, sua eficiência é $O(\lg m)$.

```
int insereHeap(int v[], int m, int x)
{
    v[m] = x;
    sobeHeap(v, m);
    return m + 1;
}
```

- Exemplos de uso da `insereHeap`:

```
printf("Inserindo novo elemento no max heap\n");
m = insereHeap(v, m, 999);
printf("Criando novo max heap usando insereHeap - ordem direta\n");
m = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
    m = insereHeap(v, m, i);
printf("Criando novo max heap usando insereHeap - ordem inversa\n");
m = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
    m = insereHeap(v, m, n - i - 1);
```

Uso da `sobeHeap` para reorganizar um vetor transformando-o em um Heap:

```
printf("Criando um max heap mandando todos subirem da esquerda pra direita\n");
for (i = 1; i < m; i++)
    sobeHeap(v, i);
```

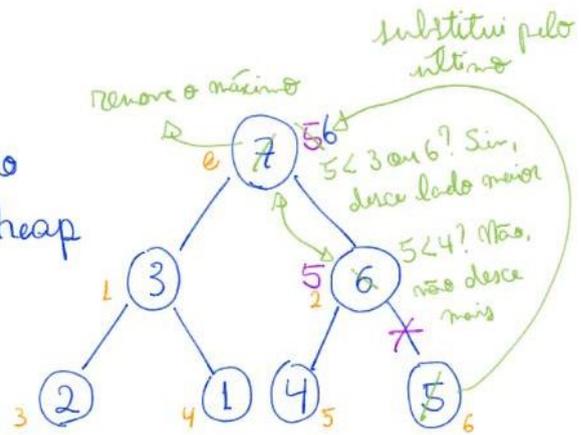
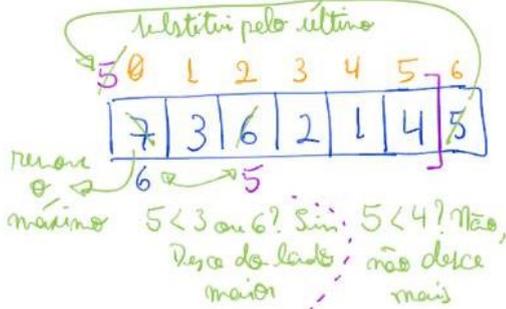
- Qual a eficiência deste algoritmo?
 - $O(m \lg m)$, pois invoca `sobeHeap` m vezes.

Desce Heap

- Veremos esta função aplicada à remoção de um elemento do heap,
 - que é seu uso mais comum.

- Também a utilizaremos para construir um heap a partir de um vetor.

- Exemplo de remoção do máximo de um heap seguida de restauração do heap usando a função `desceHeap`



Código da `desceHeap`:

```
void desceHeap(int v[], int m, int k)
{
    int p = k, f;
    while (FILHO_ESQ(p) < m && (v[FILHO_ESQ(p)] > v[p] || (FILHO_DIR(p) < m &&
v[FILHO_DIR(p)] > v[p]))
    {
        f = FILHO_ESQ(p);
        if (FILHO_DIR(p) < m && v[FILHO_DIR(p)] > v[f])
            f = FILHO_DIR(p);
        troca(&v[p], &v[f]);
        p = f;
    }
}
```

- Exemplo de uso da `desceHeap`:

```
printf("Testando desceHeap com elemento da primeira posicao\n");
v[0] = 0;
desceHeap(v, m, 0);
```

Corretude e invariante da `desceHeap`:

- o invariante principal que vale no início de cada iteração é
 - todo elemento em $v[0 .. m - 1]$ respeita a propriedade do heap,
 - exceto, possivelmente, pelo elemento p .
 - Isto é, $v[i] \geq v[\text{FILHO_ESQ}(i)] = v[2 * i + 1]$
 - e $v[i] \geq v[\text{FILHO_DIR}(i)] = v[2 * i + 2]$ vale para todo $i \neq p$.

Eficiência da `desceHeap`:

- número de operações é $O(\lg m)$,
 - pois em cada iteração descemos um nível na árvore do heap

- e o maior nível é $\text{piso}(\lg m)$.

A seguir apresentamos o código da função **removeHeap**,

- que implementa uma das operações fundamentais da fila de prioridade.
- Esta função remove e devolve o elemento máximo,
 - que está na primeira posição do vetor.
- Para ocupar essa posição vaga,
 - ela move o último elemento do vetor para a primeira posição.
- Então, ela invoca `desceHeap` para restabelecer a propriedade do Heap.
 - Por isso, sua eficiência é $O(\lg m)$.

```
int removeHeap(int v[], int m, int *x)
{
    *x = v[0];
    troca(&v[0], &v[m - 1]);
    desceHeap(v, m, 0);
    return m - 1;
}
```

- Exemplo de uso do `removeHeap`:

```
m = removeHeap(v, m, &x);
```

Curiosidade:

- É possível usar a função `desceHeap` para reorganizar um vetor
 - de modo a transformá-lo em um heap.
- De fato, essa implementação é particularmente eficiente.
 - Veremos como ela funciona na próxima aula.

Quizz:

- Considere que uma operação de edição
 - alterou a prioridade de um elemento i de um Heap,
 - alocado em um vetor $v[0 .. m - 1]$.
- Podemos usar as funções `sobeHeap` e `desceHeap`
 - para restaurar a propriedade do Heap.
- Supondo que a edição reduziu a prioridade de i ,
 - qual função usar e quais os parâmetros da chamada?
- Responda a mesma questão,
 - no caso da edição ter aumentado a prioridade de i .