## Melhores momentos

# AULA 16

## Segmento de soma máxima

Um **segmento** de um vetor v[0 . . n−1] é qualquer subvetor da forma v[e . . d].

**Problema**: Dado um vetor v[0 . . n−1] de números inteiros, determinar um segmento v[e . . d] de soma máxima.

Entra:

| | 0 | | | | | | | | | n−1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 31 | −41 | 59 | 26 | −53 | 58 | 97 | −93 | −23 | 84 |

## Segmento de soma máxima

Sai:

| | 0 | | 2 | | | | 6 | | | n−1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 31 | −41 | 59 | 26 | −53 | 58 | 97 | −93 | −23 | 84 |

v[e . . d] = v[2 . . 6] é segmento de soma máxima.

v[2 . . 6] tem soma **187**.

## Conclusões

| |
|---|
| O consumo de tempo do algoritmo segMax3 é proporcional a $n^3$. |

| |
|---|
| O consumo de tempo do algoritmo segMax2 é proporcional a $n^2$. |

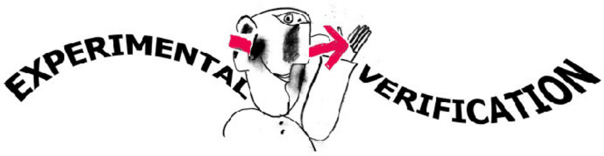
| |
|---|
| O consumo de tempo do algoritmo segMax é proporcional a n. |

## Algumas técnicas

- Evitar recomputações. Usar espaço para armazenar resultados a fim de evitar recomputá-los (segMax2, segMax).
- Algoritmos incrementais/varredura. Solução de um subproblema é estendida a uma solução do problema original (segMax).
- Delimitação inferior. Projetistas de algoritmos só dormem em paz quando sabem que seus algoritmos são o melhor possível (segMax).

# AULA 17

## Análise experimental de algoritmos




Fonte: http://lebed.com/HumorTheory/

"O interesse em experimentação, é devido ao reconhecimento de que os resultados teóricos, freqüentemente, não trazem informações referentes ao desempenho do algoritmo na prática."

## Análise experimental de algoritmos

Segundo D.S. Johnson, pode-se dizer que existem quatro motivos básicos que levam a realizar um trabalho de implementação de um algoritmo:

- usar o código em uma aplicação particular, cujo propósito é descrever o impacto do algoritmo em um certo contexto;
- proporcionar evidências da superioridade de um algoritmo;

## Análise experimental de algoritmos

- melhor compreensão dos pontos fortes e fracos e do desempenho das operações algorítmicas na prática; e
- produzir conjecturas sobre o comportamento do algoritmo no caso-médio sob distribuições específicas de instâncias onde a análise probabilística direta é muito difícil.

## Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos foi um computador rodando Ubuntu GNU/Linux 3.2.0-30

As especificações do computador que geraram as saídas a seguir são

```
model name: Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q6600 @ 2.40GHz
cpu MHz    : 1596.000
cache size: 4096 KB

MemTotal   : 3354708 kB
```

## Ambiente experimental

Os códigos foram compilados com o gcc 4.6.3 e com opções de compilação

-Wall -ansi -O2 -pedantic -Wno-unused-result

As implementações comparadas neste experimento são `segMax3`, `segMax2` e `segMax`.

## Ambiente experimental

A estimativa do tempo é calculada utilizando-se:

```
#include <time.h>
[...]
clock_t start, end;
double time;

start = clock();

[...implementação...]

end  = clock();
time = ((double)(end - start))/CLOCKS_PER_SEC;
```

## Resultados experimentais

| segMax3 | | |
|---|---|---|
| n | tempo (s) | comentário |
| 256 | 0.00 | |
| 512 | 0.02 | |
| 1024 | 0.12 | |
| 2048 | 0.89 | |
| 4096 | 6.99 | |
| 8192 | 55.55 | ≈ 1 min |
| 16384 | 444.25 | > 7 min |
| 32768 | 59m15.550s | ≈ 1 hora |

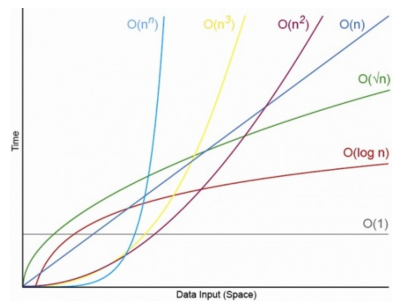
## Resultados experimentais

| segMax2 | | |
|---|---|---|
| n | tempo (s) | comentário |
| 2048 | 0.00 | |
| 4096 | 0.01 | |
| 8192 | 0.02 | |
| 16384 | 0.13 | |
| 32768 | 0.53 | |
| 65536 | 2.12 | |
| 131072 | 8.52 | |
| 262144 | 34.08 | ≈ 0.5 min |
| 524288 | 136.56 | > 2 min |
| 1048576 | 561.41 | > 9 min |

## Resultados experimentais

| segMax | | |
|---|---|---|
| n | tempo (s) | comentários |
| 1048576 | 0.00 | |
| 2097152 | 0.01 | |
| 4194304 | 0.01 | |
| 8388608 | 0.01 | |
| 16777216 | 0.02 | |
| 33554432 | 0.05 | |
| 67108864 | 0.09 | |
| 134217728 | 0.19 | > 134 milhões |
| 268435456 | 0.37 | > 268 milhões |
| 536870912 | 0.75 | > 0.5 bilhões |

## Notação assintótica




Fonte:
http://programmers.stackexchange.com/questions/112863/

CLRS 3.1

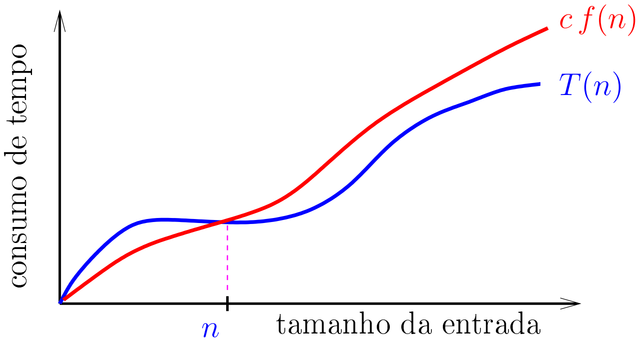
## Notação assintótica

Sejam $\mathtt{T(n)}$ e $\mathtt{f(n)}$ funções dos inteiros nos reais. Dizemos que $\mathtt{T(n)}$ **é** $\mathrm{O}(\mathtt{f(n)})$ se existem constantes positivas $\mathtt{c}$ e $\mathtt{n_0}$ tais que

$$\mathtt{T(n)} \leq \mathtt{c\,f(n)}$$

para todo $\mathtt{n} \geq \mathtt{n_0}$.

## Notação assintótica

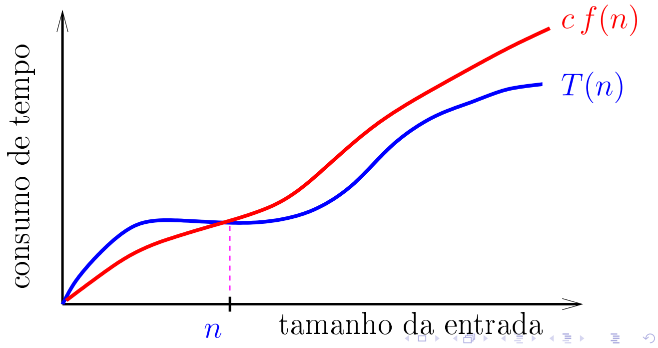


## Mais informal

$T(n)$ é $O(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$T(n) \leq c\,f(n)$$

para todo $n$ suficientemente GRANDE.




## Consumo de tempo segMax3

Se a execução de cada linha de código consome **1 unidade** de tempo o consumo total é:

| linha | | todas as execuções da linha | |
|---|---|---|---|
| 1 | $=$ | $1$ | $= O(1)$ |
| 2 | $=$ | $n+1$ | $= O(n)$ |
| 3 | $=$ | $(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$ | $= O(n^2)$ |
| 4 | $=$ | $n+(n-1)+\cdots+1$ | $= O(n^2)$ |
| 5 | $=$ | $(2+\cdots+(n+1))+(2+\cdots+n)+\cdots+2$ | $= O(n^3)$ |
| 6 | $=$ | $(1+\cdots+n)+(1+\cdots+(n-1))+\cdots+1$ | $= O(n^3)$ |
| 7 | $=$ | $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ | $= O(n^2)$ |
| 8 | $\leq$ | $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ | $= O(n^2)$ |
| total | $=$ | $O(2n^3+4n^2+n+1)$ | $= O(n^3)$ |

## Consumo de tempo segMax2

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

| linha | | todas as execuções da linha | |
|---|---|---|---|
| 1 | $=$ | $1$ | $= O(1)$ |
| 2 | $=$ | $n+1$ | $= O(n)$ |
| 3 | $=$ | $n$ | $= O(n)$ |
| 4 | $=$ | $(n+1)+n+\cdots+2$ | $= O(n^2)$ |
| 5 | $=$ | $n+(n-1)+\cdots+1$ | $= O(n^2)$ |
| 6 | $=$ | $n+(n-1)+\cdots+1$ | $= O(n^2)$ |
| 7 | $\leq$ | $n+(n-1)+\cdots+1$ | $= O(n^2)$ |
| total | $=$ | $O(4n^2+2n+1)$ | $= O(n^2)$ |

## Consumo de tempo segMaxI

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

| linha | | todas as execuções da linha | |
|---|---|---|---|
| 1 | $=$ | $1$ | $= O(1)$ |
| 2 | $=$ | $n+1$ | $= O(n)$ |
| 3 | $=$ | $n$ | $= O(n)$ |
| 4 | $=$ | $2+3+\ldots+(n+1)$ | $= O(n^2)$ |
| 5 | $=$ | $1+2+\ldots+n$ | $= O(n^2)$ |
| 6 | $=$ | $1+2+\ldots+n$ | $= O(n^2)$ |
| 7 | $=$ | $n$ | $= O(n)$ |
| 8 | $\leq$ | $n$ | $= O(n)$ |
| total | $=$ | $O(3n^2+4n+1)$ | $= O(n^2)$ |

## Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo segMax3 é $O(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo segMax2 é $O(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo segMax é $O(n)$.

## $(3/2)n^2 + (7/2)n - 4$ versus $(3/2)n^2$

| $n$ | $(3/2)n^2 + (7/2)n - 4$ | $(3/2)n^2$ |
|---|---|---|
| 64 | 6364 | 6144 |
| 128 | 25020 | 24576 |
| 256 | 99196 | 98304 |
| 512 | 395004 | 393216 |
| 1024 | 1576444 | 1572864 |
| 2048 | 6298620 | 6291456 |
| 4096 | 25180156 | 25165824 |
| 8192 | 100691964 | 100663296 |
| 16384 | 402710524 | 402653184 |
| 32768 | 1610727420 | 1610612736 |

## $(3/2)n^2 + (7/2)n - 4$ versus $(3/2)n^2$

| $n$ | $(3/2)n^2 + (7/2)n - 4$ | $(3/2)n^2$ |
|---|---|---|
| 64 | 6364 | 6144 |
| 128 | 25020 | 24576 |
| 256 | 99196 | 98304 |
| 512 | 395004 | 393216 |
| 1024 | 1576444 | 1572864 |
| 2048 | 6298620 | 6291456 |
| 4096 | 25180156 | 25165824 |
| 8192 | 100691964 | 100663296 |
| 16384 | 402710524 | 402653184 |
| 32768 | 1610727420 | 1610612736 |

$(3/2)n^2$ domina os outros termos

## Tamanho máximo de problemas

Suponha que cada operação consome 1 microsegundo ($1\mu s$).

| consumo de tempo($\mu s$) | Tamanho máximo de problemas ($n$) | | |
|---|---|---|---|
| | 1 segundo | 1 minuto | 1 hora |
| $400n$ | 2500 | 150000 | 9000000 |
| $20\, n\, \lceil \lg n \rceil$ | 4096 | 166666 | 7826087 |
| $2n^2$ | 707 | 5477 | 42426 |
| $n^4$ | 31 | 88 | 244 |
| $2^n$ | 19 | 25 | 31 |

Michael T. Goodrich e Roberto Tamassia, *Projeto de Algoritmos*, Bookman.

## Crescimento de algumas funções

| $n$ | $\lg n$ | $\sqrt{n}$ | $n \lg n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1,4 | 2 | 4 | 8 | 4 |
| 4 | 2 | 2 | 8 | 16 | 64 | 16 |
| 8 | 3 | 2,8 | 24 | 64 | 512 | 256 |
| 16 | 4 | 4 | 64 | 256 | 4096 | 65536 |
| 32 | 5 | 5,7 | 160 | 1024 | 32768 | 4294967296 |
| 64 | 6 | 8 | 384 | 4096 | 262144 | $1{,}8\ 10^{19}$ |
| 128 | 7 | 11 | 896 | 16384 | 2097152 | $3{,}4\ 10^{38}$ |
| 256 | 8 | 16 | 1048 | 65536 | 16777216 | $1{,}1\ 10^{77}$ |
| 512 | 9 | 23 | 4608 | 262144 | 134217728 | $1{,}3\ 10^{154}$ |
| 1024 | 10 | 32 | 10240 | 1048576 | $1{,}1\ 10^{9}$ | $1{,}7\ 10^{308}$ |

## Nomes de "classes" O

| classe | nome |
|---|---|
| $O(1)$ | constante |
| $O(\lg n)$ | logarítmica |
| $O(n)$ | linear |
| $O(n \lg n)$ | $n \log n$ |
| $O(n^2)$ | quadrática |
| $O(n^3)$ | cúbica |
| $O(n^k)$ com $k \geq 1$ | polinomial |
| $O(2^n)$ | exponencial |
| $O(a^n)$ com $a > 1$ | exponencial |

## Busca em vetor ordenado


Fonte: `http://www.php5dp.com/`

PF 7.1 a 7.8

`http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/bub`

## Busca em vetor ordenado

Um vetor $v[0\,..\,n-1]$ é **crescente** se

$$v[0] \leq v[1] \leq v[2] \leq \cdots \leq v[n-1].$$

**Problema**: Dado um número $x$ e um vetor crescente $v[0\,..\,n-1]$ encontrar um índice $m$ tal que $v[m] == x$.

Entra: $x$ == 50

| | 0 | | | | | | | 7 | | | $n-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

Sai: $m$ == 7

## Busca em vetor ordenado

Entra: x == 57

| | 0 | | | | | | | | | | n−1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

Sai: m == -1 (x não está em v)

## Busca sequencial

```
int buscaSequencial(int x, int n, int v[])
 {
1   int m = 0;
2   while (/*1*/ m < n && v[m] < x) ++m;
3   if (m < n && v[m] == x)
4       return m;
5   return -1;
 }
```

## Exemplo

x == 55

| | 0 | | | | | | | | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

| | m | | | | | | | | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

| | 0 | m | | | | | | | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

| | 0 | | m | | | | | | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

| | 0 | | | m | | | | | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

## Exemplo

x == 55

| | 0 | | | | m | | | | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

| | 0 | | | | | m | | | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

| | 0 | | | | | | m | | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

| | 0 | | | | | | | m | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

| | 0 | | | | | | | | m | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

## Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $v[m-1] < x$. ♡

x == 55

| | 0 | | | | | | | m | | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

A relação (i0) vale no começo da primeira iteração se supusermos que $v[-1] = -\infty$.

No início da última iteração $m \geq n$ ou $v[m] \geq x$.

Portanto, se a função devolve -1, então x não está em $v[0\,..\,n-1]$

## Consumo de tempo buscaSequencial

Se a execução de cada linha de código consome 1 **unidade** de tempo o consumo total é:

| linha | todas as execuções da linha | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $=$ | $1$ | $= 1$ |
| 2 | $\leq$ | $n+1$ | $\approx n$ |
| 3 | $=$ | $1$ | $= 1$ |
| 4 | $\leq$ | $1$ | $\leq 1$ |
| 5 | $\leq$ | $1$ | $\leq 1$ |
| total | $\leq$ | $n+3$ | $= O(n)$ |

## Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo `buscaSequencial` no pior caso é proporcional a `n`.

O consumo de tempo do algoritmo `buscaSequencial` é $O(n)$.

## Busca binária

```
int buscaBinaria(int x, int n, int v[]) {
    int e, m, d;
    e = 0; d = n-1;
    while (/*1*/ e <= d) {
        m = (e + d)/2;
        if (v[m] == x) return m;
        if (v[m] < x) e = m + 1;
        else d = m - 1;
    }
    return -1;
}
```

## Exemplo

`x == 48`

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | | | | | | | | | | 10 |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |
| | e | | | | | | | | | | d |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |
| | e | | | | | m | | | | | d |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |
| | 0 | | | | | | e | | | | d |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |
| | 0 | | | | | | e | | m | | d |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

## Exemplo

`x == 48`

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | | | | | | e | d | | | 10 |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |
| | | | | | | | m | | | | |
| | 0 | | | | | | e | d | | | 10 |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |
| | | | | | | | | e | | | |
| | 0 | | | | | | | d | | | 10 |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

## Exemplo

`x == 48`

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | m | | | |
| | | | | | | | | e | | | |
| | 0 | | | | | | | d | | | 10 |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |
| | 0 | | | | | | d | e | | | 10 |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

## Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $v[e-1] < x < v[d+1]$. ♡

`x == 48`

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | | | | | e | | d | | | n-1 |
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

A relação (i0) vale no começo da primeira iteração se supusermos que $v[-1] = -\infty$ e $v[n] = +\infty$.

## Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em `/*1*/` vale que: $v[e-1] < x < v[d+1]$. ♡

`x == 48`

| | 0 | | | | | e | | d | | | n-1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

No início da última iteração quando $e > d$ nenhum elemento é "$> v[e-1]$" e "$< v[d+1]$", pois o vetor é crescente (!). Logo, $x$ não está em $v[0\,..\,n-1]$ e função devolve `-1`

## Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em `/*1*/` vale que: $v[e-1] < x < v[d+1]$. ♡

`x == 48`

| | 0 | | | | | e | | d | | | n-1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |

O valor de $d - e$ diminui a cada iteração. Portanto, se a função não encontra `m` tal que `v[m]==x`, então a função para quando $d - e < 0$.

## Consumo de tempo `buscaBinaria`

O consumo de tempo da função `buscaBinaria` é proporcional ao número $k$ de iterações do `while`.

No início da 1a. iteração tem-se que
$d - e = n - 1 \approx n$.

Sejam
$$(e_0, d_0), (e_1, d_1), \ldots, (e_k, d_k),$$
os valores das variáveis $e$ e $d$ no início de cada uma das iterações. No pior caso $x$ não está em $v$.
Assim, $d_{k-1} - e_{k-1} \geq 0$ **e** $d_k - e_k < 0$

## Número iterações

Estimaremos o valor de $k$ em função de $d - e$.

Note que $d_{i+1} - e_{i+1} \leq (d_i - e_i)/2$ para `i=1,2,...,k-1`.

Desta forma tem-se que

$$\begin{array}{lcccccc}
d_0 - e_0 & = & n-1 & < & n & & \\
d_1 - e_1 & \leq & (d_0 - e_0)/2 & < & n/2 & & \\
d_2 - e_2 & \leq & (d_1 - e_1)/2 & < & (n/2)/2 & = & n/2^2 \\
d_3 - e_3 & \leq & (d_2 - e_2)/2 & < & (n/2^2)/2 & = & n/2^3 \\
d_4 - e_4 & \leq & (d_3 - e_3)/2 & < & (n/2^3)/2 & = & n/2^4 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

## Número iterações

Percebe-se que depois de cada iteração o valor de $d - e$ é reduzido pela metade.
Seja $t$ o número inteiro tal que

$$2^t \leq n < 2^{t+1}$$

Da primeira desigualdade temos que

$$t \leq \lg n,$$

onde $\lg n$ denota o logaritmo de $n$ na base 2.

## Número iterações

Da desigualde estrita, concluímos que

$$0 \leq (d_{k-1} - e_{k-1})/2^{k-1} < \underline{n}/2^{k-1} < \underline{2^{t+1}}/2^{k-1}.$$

Assim, em particular temos que

$$1 \leq 2^{t+1}/2^{k-1}$$

ou, em outras palavras

$$k \leq t + 2.$$

Portanto , o número $k$ de iterações é não superior a

$$t + 2 \leq \lg n + 2.$$

## Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo `buscaBinaria` no pior caso é proporcional a $\lg n$.

O consumo de tempo do algoritmo `buscaBinaria` é $O(\lg n)$.

## Número de iterações

| buscaSequencial | buscaBinaria |
|---|---|
| n | $\lg n$ |
| 256 | 8 |
| 512 | 9 |
| 1024 | 10 |
| 2048 | 11 |
| 4096 | 12 |
| 8192 | 13 |
| 16384 | 14 |
| 32768 | 15 |
| 65536 | 16 |
| 262144 | 18 |
| 1048576 | 20 |
| ⋮ | ⋮ |
| 4294967296 | 32 |

## Versão recursiva da busca binária

Para formular uma versão recursiva é necessário generalizar um pouco o problema trocando `v`[0..`n`−1] por `v`[`e`..`d`].

```
int buscaBinaria(int x, int n, int v[])
 {
   return buscaBinariaR(x,0,n-1,v);
 }
```

## Versão recursiva da busca binária

Recebe um vetor crescente `v`[`e`..`d`] e devolve um índice `m` tal que `v[m] == x`. Se tal `m` não existe, devolve `-1`.

```
int
buscaBinariaR(int x,int e,int d,int v[]) {
   int m;
   if (d < e) return -1;
   m = (e + d)/2;
   if (v[m] == x) return m;
   if (v[m] < x)
       return buscaBinariaR(x,m+1,d,v);
   return buscaBinariaR(x,e,m-1,v);
 }
```

## Outra versão recursiva

**Observações:**

- As declarações `int v[]` e `int *v` no protótipos de funções são equivalentes. Abaixo escolhemos `int *v` apenas para deixar **mais explicito** que em ambos os casos o que está sendo passado como parâmetro é um **endereço**(!).
- As expressões "`&v[m+1]`" e "`v+m+1`" são equivalentes (=tem o mesmo valor =representam o mesmo endereço).
- Tem um problema ...

## Outra versão recursiva

**A função abaixo não resolve o problema...**

Por quê? Como consertar?

```
int
buscaBinariaR(int x,int n, int *v) {
  int m;
  if (n == 0) return -1;
  m = n/2;
  if (v[m] == x) return m;
  if (v[m] < x)
     return buscaBinariaR(x,n-m-1,&v[m+1]);
  return buscaBinariaR(x,m,v);
 }
```