Alguns Exercícios do Capítulo 4 - Métodos de Demonstração

hip: x é par — hip: y é ímpar — tese: $x.y$ é par?

Exercício 4.1: Demonstre que o produto de um inteiro par por um inteiro ímpar é par.

x é par $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}(x = 2q)$ | y é par $\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}(y = 2h+1)$ | $x.y = 2q.(2h+1) = 2(2hq+q)$ | Para $K = 2hq+q \in \mathbb{Z}$ temos $x.y = 2K \Rightarrow x.y$ é par

hip: $r \neq 0$ ①

Exercício 4.2: Demonstre que se r é um número racional diferente de zero, então $\frac{1}{r}$ é racional. (tese)

hip: r é racional $\Rightarrow \exists p,q \in \mathbb{Z}\left(r = \frac{p}{q} \wedge q \neq 0\right)$ | ① $r = \frac{p}{q} \neq 0 \Rightarrow p \neq 0$ ② | $\frac{1}{r} = \frac{1}{(p/q)} \overset{②}{=} \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{1}{r}$ é racional

Exercício 4.3: Demonstre que, para quaisquer conjuntos A, B, C e D, as seguintes afirmações são sempre verdadeiras

a) • Se $x \in A$ (hip①), $(A \setminus B) \subseteq (C \cap D)$ (hip②) e $x \notin D$ (hip③), então $x \in B$ (Tese).

② $\forall y(y \in A \wedge y \notin B \Rightarrow y \in C \wedge y \in D) \Rightarrow \forall y(y \notin D \Rightarrow y \notin A \vee y \in B) \overset{③}{\Rightarrow} x \notin A \vee x \in B \overset{①}{\Rightarrow} x \in B$

• Se B e C são disjuntos (hip① $B \cap C = \emptyset$), $A \subseteq C$ (hip② $\forall y(y \in A \Rightarrow y \in C)$) e $x \in A$ (hip③ $x \in A$), então $x \notin B$. ③ e ② $\Rightarrow x \in C \overset{①}{\Rightarrow} x \notin B$

c) • Se $x \in C$ (hip. ①) e $(A \cap C) \subseteq B$ (②), então $x \notin (A \setminus B)$ (tese). ② $\forall y(y \in A \wedge y \in C \Rightarrow y \in B) \overset{①}{\Rightarrow} x \in A \overset{③}{\Rightarrow} x \in B$

$a \Rightarrow b \cong \sim a \vee b \overset{③}{\Rightarrow} x \notin A \vee x \in B$ || $\sim(x \in A \wedge x \notin B) \cong x \notin A \vee x \in B$

Exercício 4.4: Sejam X_1, X_2, Y_1, Y_2 subconjuntos de um conjunto U. Suponha que $X_1 \cup X_2 = U$ e $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, que $X_1 \subset Y_1$ e que $X_2 \subset Y_2$. Prove que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.

Fim.

$\forall n \in \mathbb{Z}(n^3+5$ é ímpar $\overset{?}{\Rightarrow} n$ é par$)$ $\overset{\text{contra-positiva}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall(n \in \mathbb{Z}(n$ é ímpar $\overset{?}{\Rightarrow} n^3+5$ é par$)$

Hip. n é ímpar $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}(n = 2q+1)$ | $n^3+5 = (2q+1)^3+5 = (2q+1)(2q+1)^2+5 = (2q+1)(4q^2+4q+1)+5$

Exercício 4.5: Demonstre que, para todo inteiro n, se $n^3 + 5$ é impar, então n é par. $= 2q(4q^2+4q+1) + 2(2q^2+2q)+1+5$

$= 2K$ p/ $K = q(2q+1)^2 + 2q^2+2q+3 \in \mathbb{Z}$

Exercício 4.6: Seja n um número inteiro da forma $4k + 3$, $k \geq 0$. Demonstre que não existem inteiros x, y tais que $x^2 + y^2 = n$. Provar que $\forall n(\exists k \in \mathbb{Z}(n = 4k+3,\ p/\ k \geq 0) \Rightarrow \nexists x,y \in \mathbb{Z}(x^2+y^2 = n))$

Contra-positiva: $\forall n \in \mathbb{Z}(\exists x,y \in \mathbb{Z}(x^2+y^2 = n) \Rightarrow \nexists k \in \mathbb{Z}(n = 4k+3,\ p/\ k \geq 0))$

Prova: $n = x^2+y^2 \Rightarrow$ Caso 1) x e y par $\Rightarrow n$ é par $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}(n \neq 4k+3)$ | Caso 2) x e y ímpar $\Rightarrow n$ é par

4.2.3 Método de redução ao absurdo

Caso 3) Sem perda de generalidade x é par e y é ímpar

$n = x^2+y^2 = (2q)^2+(2h+1)^2 = 4q^2+4h^2+4h+1 = 4(q^2+h^2+h)+1 \neq 4K+3$ p/ todo $K \in \mathbb{Z}$

Exercício 4.8: Demonstre que a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional. Seja $x = \frac{p}{q}$ um racional, c/ $q \neq 0$. Seja y um irracional. Por absurdo, seja $z = \frac{l}{h}$ um racional t.q. $h \neq 0$ e $x+y = z \Rightarrow \frac{p}{q} + y = \frac{l}{h} \Rightarrow y = \frac{l}{h} - \frac{p}{q} \Rightarrow y = \frac{lq - ph}{h.q}$ é racional, um absurdo

Exercício 4.9: Demonstre que o número $\sqrt{2}$ é irracional.

esta fração é irredutível, i.e., p e q são os menores inteiros positivos que a satisfazem

Por absurdo, supor $\sqrt{2}$ é racional $\Rightarrow \exists p, q \neq 0 \in \mathbb{Z}(\sqrt{2} = p/q) \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow p^2 = 2.q^2 \Rightarrow p^2$ é par $\Rightarrow p$ é par $\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}(p = 2h) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2h}{q} \Rightarrow 2 = \frac{4h^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2h^2 \Rightarrow q^2$ é par $\Rightarrow q$ é par $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z}(q = 2r) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2h}{2r} = h/r \Rightarrow$ contradição

Exercício 4.10: Sejam x, y, z números reais. Demonstre que pelo menos um deles é maior ou igual à média aritmética dos três.

Por absurdo supor $x < m$, $y < m$ e $z < m$, p/ $m = \frac{x+y+z}{3} \Rightarrow x+y+z < 3m = 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = x+y+z \Rightarrow$ absurdo

Exercício 4.11: Demonstre que, se p é um inteiro ímpar, então a equação $x^2 + x - p = 0$ não tem solução inteira.

hip① p é ímpar $\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}(p = 2h+1)$ || Por contradição, supor que $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2+x = p) \overset{①}{\Rightarrow} x^2+x = 2h+1$

Caso 1) x é par $\Rightarrow x^2+x$ é par (Absurdo) | Caso 2) x é ímpar $\Rightarrow x^2$ é ímpar $\Rightarrow x^2+x$ é par (Absurdo)

Exercício 4.12: Demonstre que, se r é um número irracional, então $\frac{1}{r}$ é irracional.