

AED2 - Aula 14.2

Ordenação por contagem (countingSort)

Este método é especializado na ordenação de vetores de inteiros pequenos,

- e não é baseado na comparação entre elementos do vetor.
- Por isso, vence o limitante inferior $\Omega(n \lg n)$ para ordenação.

$\Omega(n \lg n)$

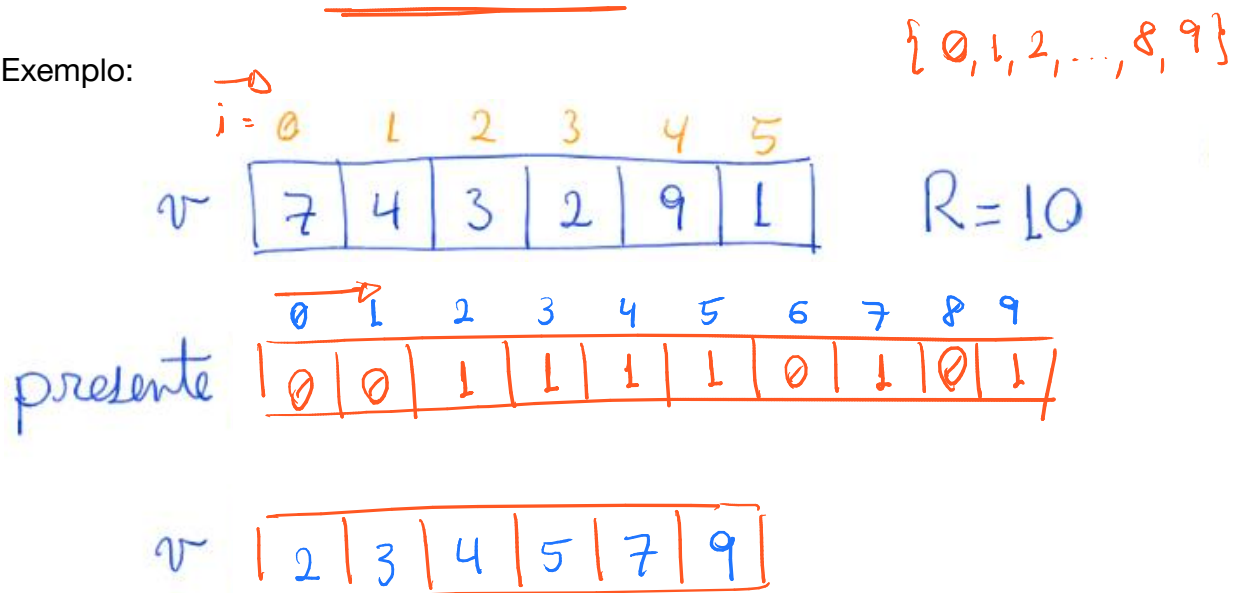
Para desenvolver a ideia do algoritmo vamos supor que no vetor v de tamanho n

- só existem inteiros entre 0 e $R - 1$.

Ideia 1: para simplificar, primeiro supomos que não existem elementos repetidos.

- Neste caso, podemos alocar um vetor auxiliar presente
 - e inicializar presente com 0.
- Percorrer v com um índice i , marcando presente $[v[i]] = 1$
- Percorrer presente da esquerda para a direita com um índice valor,
 - colocando valor na próxima posição livre de v
 - se presente $[valor] = 1$.

Exemplo:



Código:

```
// ordena um vetor  $v[0 .. n-1]$  de inteiros em  $[0, R)$   $\in \{0, 1, 2, \dots, R-1\}$   
// desde que não existam elementos repetidos
```

```
void countingSortErrado1(int v[], int n, int R) {
```

```
    int *presente, valor, i;
```

```
    presente = malloc(R * sizeof(int));
```

```
    for (valor = 0; valor < R; valor++)
```

```
        presente[valor] = 0;
```

```
    for (i = 0; i < n; i++) — percorrer o vetor  $v$ 
```

```
        presente[v[i]] = 1;
```

```
    i = 0;
```

```
    for (valor = 0; valor < R; valor++) — percorrer o vetor presente
```

```
        if (presente[valor] == 1)  $v[i++] =$  valor;
```

```
    free(presente);
```

```
}
```

Agora vamos considerar que podem existir elementos repetidos.

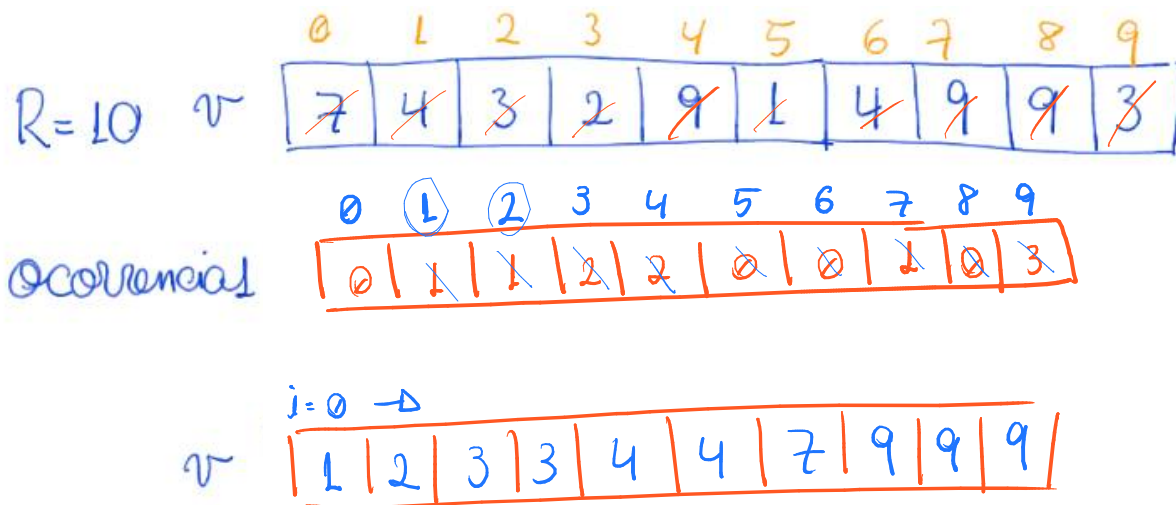
- Para tanto, vamos usar o número de ocorrências de um elemento.

Nesta nova abordagem, vamos alocar um vetor auxiliar *ocorrencias*.

$e \{0, 1, 2, \dots, R-1\}$

- Inicializar *ocorrencias* com 0.
- Percorrer *v* com um índice *i*,
 - fazendo $ocorrencias[v[i]] += 1$
- Assim, para cada *valor* em $[0, R)$, ao final do laço
 - $ocorrencias[valor]$ possuirá o número de ocorrências de *valor*.
- Percorrer *ocorrencias* da esquerda para a direita com um índice *valor*,
 - colocando $ocorrencias[valor]$ cópias de *valor*
 - nas próximas posições livres de *v*.

Exemplo:



Código:

```
// ordena um vetor v[0 .. n-1] de inteiros em [0, R)
// copia ao invés de rearranjar
void countingSortErrado2(int v[], int n, int R) {
    int *ocorrencias, valor, i, repet;
    ocorrencias = malloc(R * sizeof(int));
    for (valor = 0; valor < R; valor++)
        ocorrencias[valor] = 0;
    for (i = 0; i < n; ++i)
        ocorrencias[v[i]] += 1;
    i = 0;
    for (valor = 0; valor < R; valor++)
        for (repet = 0; repet < ocorrencias[valor]; repet++)
            v[i++] = valor;
    free(ocorrencias);
}
```

Apesar de aparentarem ser corretos, tanto esse último algoritmo quanto o primeiro,

- apresentam um erro fundamental. Qual?

Apesar de aparentarem ser corretos, esses últimos algoritmos tem um erro. Qual?

- Eles não estão ordenando os elementos originais,
 - mas apenas criando cópias das chaves destes.
- Esse é um problema grave quando as chaves sendo ordenadas
 - são parte de elementos que possuem outras informações,
 - como registros ou ponteiros, por exemplo.
- Ou ainda, quando são partes de uma chave maior, como veremos
 - na aplicação do **countingSort** como subrotina do LSD **radixSort**.

Para resolver esse problema, temos que percorrer v movendo os elementos

- para suas respectivas posições ordenadas. Para tanto, é preciso saber
 - o # de elementos **ocorr_pred[val]** que ocorre antes de cada chave **val**.
- Assim, vamos calcular o número de ocorrências dos predecessores
 - usando o número de ocorrências **ocorrs[val]** de cada chave **val**.

- O número de ocorrências dos predecessores de **val** é

$$- \text{ocorr_pred}[val] = \text{ocorrs}[0] + \text{ocorrs}[1] + \dots + \text{ocorrs}[val-1]$$

- Podemos usar uma definição recursiva:

- se **val > 0** então $\text{ocorr_pred}[val] = \text{ocorr_pred}[val-1] + \text{ocorrs}[val-1]$

- se **val = 0** temos $\text{ocorr_pred}[0] = 0$

- Essa definição deriva da seguinte observação

$$\text{ocorr_pred}[val] = (\text{ocorrs}[0] + \dots + \text{ocorrs}[val-2]) + \text{ocorrs}[val-1]$$

$$\text{ocorr_pred}[val-1] = \text{ocorrs}[0] + \dots + \text{ocorrs}[val-2]$$

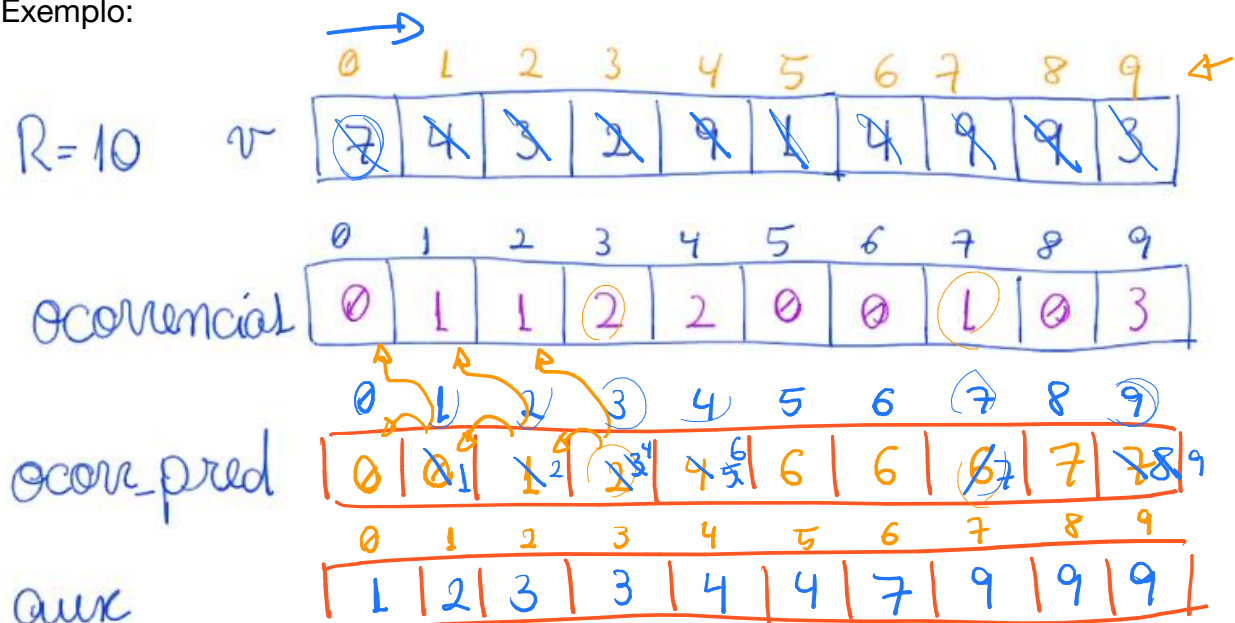
- Portanto, $\text{ocorr_pred}[val] = \text{ocorr_pred}[val-1] + \text{ocorrs}[val-1]$

- Note que, **ocorre_pred[val]** é a posição em que os elementos de chave **val**
 - devem começar a ser colocados no vetor ordenado.

Também precisaremos de um vetor auxiliar **aux[0 .. n - 1]**

- para copiar um elemento de **v** para uma posição diferente em **aux**
 - sem corromper elementos ainda não copiados de **v**.

Exemplo:



Código:

```
// ordena um vetor v[0 .. n-1] de inteiros em [0, R)
void countingSort(int v[], int n, int R) {
    int val, i;
    int *ocorrencias, *ocorr_pred, *aux;
    ocorrencias = malloc(R * sizeof(int));
    occurr_pred = malloc(R * sizeof(int));
    aux = malloc(n * sizeof(int));

    for (val = 0; val < R; val++) ocorrencias[val] = 0;
    for (i = 0; i < n; i++) ocorrencias[v[i]] += 1;

    occurr_pred[0] = 0;
    for (val = 1; val < R; val++)
        occurr_pred[val] = occurr_pred[val-1] + ocorrencias[val-1];
    // Elementos iguais a val começam no índice occurr_pred[val]
    for (i = 0; i < n; i++) {
        val = v[i];
        aux[occurr_pred[val]] = v[i];
        occurr_pred[val]++; // atualiza o número de predecessores
    }
    // aux[0 .. n-1] está em ordem crescente
    for (i = 0; i < n; ++i) v[i] = aux[i];

    free(ocorrencias);
    free(occurr_pred);
    free(aux);
}
```

Esta última versão do countingSort está correta.

- No entanto, ela desperdiça memória
 - por alocar espaço para *ocorrencias* e para *occurr_pred*.
- Observe que, só usamos *ocorrencias* para calcular os valores de *occurr_pred*.
 - Será que conseguimos economizar a memória de um desses vetores?
- Uma tentativa envolve alocar um único vetor *occurr_pred*,
 - usá-lo, inicialmente, para armazenar
 - o número de ocorrências das chaves,
 - e reaproveitá-lo para armazenar
 - o número de ocorrências dos predecessores.
- Isso é possível,
 - mas exigirá algumas mudanças sutis.

Vamos usar um único vetor `ocorr_pred` para, inicialmente,

- armazenar o número de ocorrências das chaves,
- e, depois, reaproveitá-lo para armazenar
 - o número de ocorrências dos predecessores.

$O(R)$

Isso exigirá algumas mudanças sutis. Em particular, vamos

- armazenar o número de ocorrências da chave `val` em `ocorr_pred[val + 1]`.
- Com isso, a princípio a posição `ocorr_pred[val]`
 - terá o número de ocorrências de `val - 1`.
- Lembrando que, para `val > 0`,
 - $ocorr_pred[val] = occorrs[val] + occorrs[val - 1]$.
- Assim, para que `ocorr_pred[val]` passe a armazenar
 - o número de ocorrências dos predecessores
 - basta somar a ele `ocorr_pred[val - 1]`,
 - já que o número de ocorrências de `val - 1` já está lá.

Exemplo:

$R=10$ v

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	4	3	2	9	1	4	9	9	3

`ocorr_pred[valor]` é o # de ocorrências de `valor - 1`

`ocorr_pred`

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	1	2	2	0	0	1	0	3

Para (valor = 1 até R) faça { `ocorr_pred[valor] += occorrs[valor - 1]` }

`ocorr_pred`

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	4	6	6	7	7	7	10

`ocorr_pred[valor]` passa a ser o # de ocorrências dos predecessores de `valor`

aux após percorrer v de 0 até 4

aux

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	3	4	4	7	9	9	9

Vetor v original, para nos ajudar a mover os elementos para aux

$R=10$ v

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	4	3	2	9	1	4	9	9	3

Código:

```
// ordena um vetor v[0 .. n-1] de inteiros em [0, R) → {0, ..., R-1}
void countingSort2(int v[], int n, int R) {
    int valor, i;
    int *ocorr_pred, *aux;
    ocorr_pred = malloc((R + 1) * sizeof(int));
    aux = malloc(n * sizeof(int));
    for (valor = 0; valor <= R; valor++) — inic.
        ocorr_pred[valor] = 0;
    for (i = 0; i < n; i++) { — percorre v
        valor = v[i];
        ocorr_pred[valor + 1] += 1;
    }
    // ocorr_pred[valor] é o núm. de ocorrências de valor - 1
    for (valor = 1; valor <= R; valor++)
        [ocorr_pred[valor] += ocorr_pred[valor - 1]];
    // ocorr_pred[valor] é o núm. de ocorrencias dos predecessores de
    // valor. Logo, a cadeia de elementos iguais a valor deve
    // começar no índice ocorr_pred[valor] no vetor ordenado.
    for (i = 0; i < n; i++) { — percorre v colocando em ordem em aux
        valor = v[i];
        aux[ocorr_pred[valor]] = v[i];
        ocorr_pred[valor]++; // atualiza o número de predecessores
    }
    // aux[0 .. n-1] está em ordem crescente
    for (i = 0; i < n; ++i) v[i] = aux[i];
    free(ocorr_pred);
    free(aux);
}
```

Curiosidade: note que, `ocorr_pred` foi alocado com uma posição a mais,

- mas o único motivo para tanto é evitar que, no segundo laço
 - seja acessada uma posição de memória inválida.
- Isso porque, se $valor = v[i] = R - 1$ temos que
 - $ocorr_pred[valor + 1] = occorr_pred[R]$ recebe uma atribuição.

Eficiência de tempo: countingSort leva tempo da ordem de $n + R$, i.e., $O(n + R)$.

- Isso porque cada laço itera por R ou n vezes,
 - e não temos laços aninhados.
- Se R é pequeno (da ordem de n no máximo),
 - isso é melhor que a eficiência $O(n \log n)$ de algoritmos como
 - mergeSort, quickSort e heapSort.
- Por isso, countingSort é o método preferido para ordenar
 - vetores cujas chaves são inteiros pequenos.

Eficiência de espaço: $O(n + R)$, já que precisamos de

- um vetor *ocorr_pred* de tamanho proporcional a R
 - e um vetor aux de tamanho proporcional a n .

Estabilidade:

- countingSort é estável.

Curiosidade: A estabilidade do countingSort é a propriedade chave

- que permite aplicá-lo ao **LSD radix sort**, que veremos na próxima aula.

Quiz1: A ordem de alguns laços do algoritmo é decisiva

- para manter a estabilidade, enquanto outros laços
 - poderiam ser invertidos ou seguir uma ordem arbitrária.
- Identifique a relevância da ordem de cada laço do algoritmo.

Quiz2: Como generalizar o countingSort para lidar com inteiros

- que estão em um intervalo pequeno que não começa em 0?
- Na resposta, suponha que os inteiros estão no intervalo **[lim_inf, lim_sup)**.