AED2 - Aula ~~10~~ 09
Ordenação por intercalação (mergesort)

O problema da ordenação

Definição de ordenação (crescente)
- Um vetor v[0 .. n – 1] está ordenado se $v[0] \leq v[1] \leq v[2] \leq \ldots \leq v[n-1]$

Definindo o problema da ordenação:
- Dado um vetor v de tamanho n,
  - permutar os elementos de v até ele ficar ordenado.

Exemplo:
- Entrada

~~77~~	~~55~~	~~11~~	~~44~~	~~33~~	~~22~~	~~88~~	~~66~~

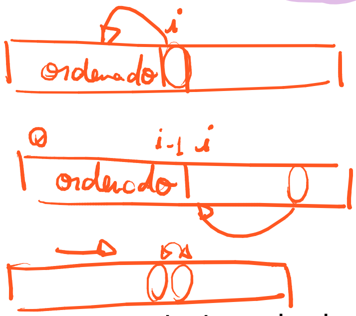
- Saída

11	22	33	44	55	66	77	88

Relembrando

Vimos algoritmos iterativos simples com tempo O(n^2) no pior caso:

- insertionSort,
- selectionSort,
- bubbleSort.



Também vimos o heapSort, que usa a estrutura de dados Heap
- para melhorar o selectionSort e atingir tempo O(n log n).

Na aula de hoje

Veremos três tópicos extremamente importantes:
- Técnica de projeto de algoritmos divisão-e-conquista.
  - Permite obter algoritmos nada óbvios e muito eficientes.
- Algoritmo de ordenação mergeSort,
  - clássico e ainda relevante.
- Árvore de recursão para analisar eficiência de algoritmo recursivo.
  - Pode ser generalizada no Teorema Mestre.

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

- Dividir: o problema é dividido em subproblemas menores do mesmo tipo.
- Conquistar: os subproblemas são resolvidos recursivamente, sendo que os subproblemas pequenos são caso base.
- Combinar: as soluções dos subproblemas são combinadas numa solução do problema original.

Ideia do mergesort

- Dividir o vetor a ser ordenado em dois subvetores,
  - cada um com metade do tamanho original.
- Ordenar cada subvetor recursivamente,
  - sendo que subvetores com 0 ou 1 elementos já estão ordenados.
- Intercalar (merge) os subvetores ordenados resultantes.

Exemplo:

77	55	11	44	33	22	88	66

- Dividir em dois subvetores.

77	55	11	44

33	22	88	66

- Conquistar recursivamente (lembrar dos casos base).

11	44	55	77

22	33	66	88

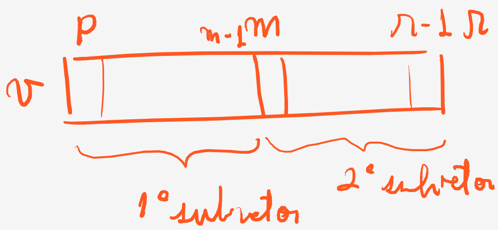
- Combinar por intercalação (merge).

11	22	33	44	55	66	77	88

Algoritmo mergeSort recursivo

$m = \frac{p+r}{2} = p - \frac{p}{2} + \frac{r}{2} = p + \frac{(r-p)}{2}$

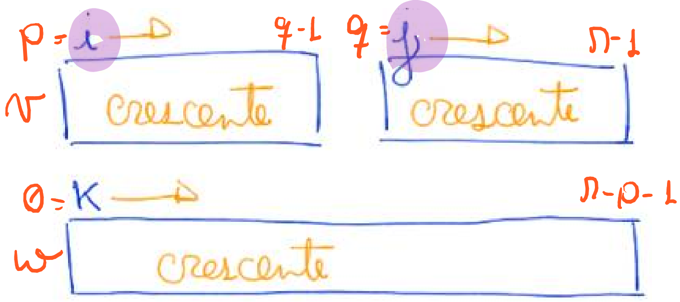
```
// ordena o vetor v[p .. r-1]
void mergeSortR(int v[], int p, int r) {
    int m;                          p < r - 1
    if (r - p > 1) { // se subvetor corrente tem mais de 1 elemento
        m = (p + r) / 2; // m = p + (r - p) / 2;
        mergeSortR(v, p, m);
        mergeSortR(v, m, r);
        intercala1(v, p, m, r);
    }
}
```



- A questão central é
  - como fazer a intercalação (merge) com eficiência linear?
- Note que, se intercala levar tempo O(n^2), não há esperança
  - desse algoritmo ser mais eficiente que os algoritmos elementares.

Problema da intercalação

- Dados v[p .. q - 1] e v[q .. r - 1] ordenados, obter v[p .. r - 1] ordenado.



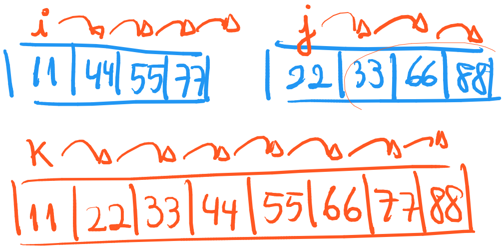
tam. w = r - p

Ideia: percorrer cada subvetor, colocando no vetor auxiliar

- o menor dentre os elementos correntes de cada subvetor.

Exemplo:

- Vetor v
- Vetor w



Algoritmo de intercalação de subvetores ordenados

```
// primeiro subvetor em v[p .. q-1], segundo subvetor em v[q .. r-1]
void intercala1(int v[], int p, int q, int r) {
    int i, j, k, tam;
    i = p;    j = q;    k = 0;    tam = r - p;
    int *w = malloc(tam * sizeof(int));
    while (i < q && j < r) { // não chegou a fim de nenhum subvetor
        if (v[i] <= v[j]) w[k++] = v[i++];   -> copia do 1° subvetor
        else /* v[i] > v[j] */ w[k++] = v[j++];   -> copia do 2° subvetor
    }
    while (i < q) w[k++] = v[i++];
    while (j < r) w[k++] = v[j++];
    for (k = 0; k < tam; k++)
        v[p + k] = w[k];
    free(w);
}
```

Invariantes e corretude do intercala1: no início de cada iteração temos

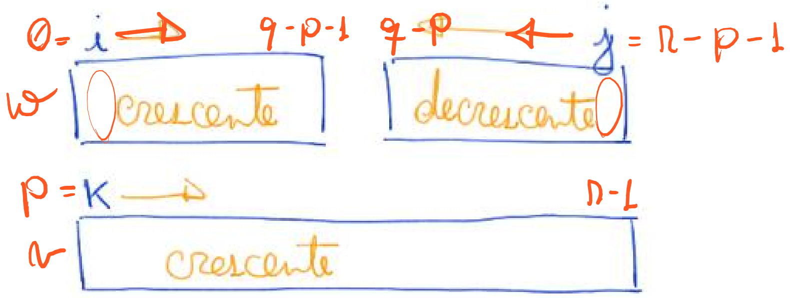
- w[0 .. k - 1] contém os elementos de v[p .. i - 1] e v[q .. j - 1],
- w[0 .. k - 1] está ordenado,
- w[0 .. k - 1] <= v[i .. q - 1],
- w[0 .. k - 1] <= v[j .. r - 1].

Eficiência de tempo do intercala:

- O número de operações é linear no tamanho do subvetor sendo intercalado,
  - ou seja, O(r - p). = O(tam)
- Para verificar isso, note que em cada iteração, de qualquer laço,
  - i ou j aumenta de 1.
- Como i começa em p e termina em q e j começa em q e termina em r,
  - temos $(q - p) + (r - q) = \cancel{q} - p + r - \cancel{q} = r - p = tam$

Curiosidade:

- Sedgewick propõe uma versão interessante do algoritmo de intercalação,
    - chamado intercalação com sentinelas.



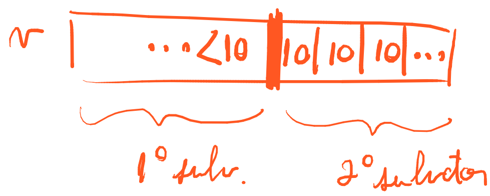

```
// primeiro subvetor em v[p .. q-1], segundo subvetor em v[q .. r-1]
void intercala2(int v[], int p, int q, int r) {
    int i, j, k, *w;
    w = malloc((r - p) * sizeof(int));
    for (i = p; i < q; ++i)
        w[i - p] = v[i];
    for (j = q; j < r; ++j)
        w[(r - p - 1) - (j - q)] = v[j];
    i = 0;
    j = r - p - 1;
    for (k = p; k < r; ++k)
        if (w[i] <= w[j])
            v[k] = w[i++];
        else
            v[k] = w[j--];
    free(w);
}
```

cópia do 1º subvetor

cópia do 2º subvetor invertido

cópia de volta p/ v em ordem

- Você consegue entender por que a função anterior funciona?
    - Por que ela não precisa de laços para copiar as sobras do primeiro ou segundo subvetor?
- Quais os invariantes do seu laço principal?
- Ela é estável? I.e., elementos iguais tem sua ordem relativa preservada?
    - Considere o caso em que existe repetição do maior elemento
        - e essas repetições estão no final do 2º subvetor.



Relembrando o código do mergeSort recursivo:

```c
// ordena o vetor v[p .. r-1]
void mergeSortR(int v[], int p, int r) {
    int m;
    if (r - p > 1) {
        m = (p + r) / 2; // m = p + (r - p) / 2;
        mergeSortR(v, p, m);  - 1°
        mergeSortR(v, m, r);  - 2°
        intercala1(v, p, m, r);
    }
}
```

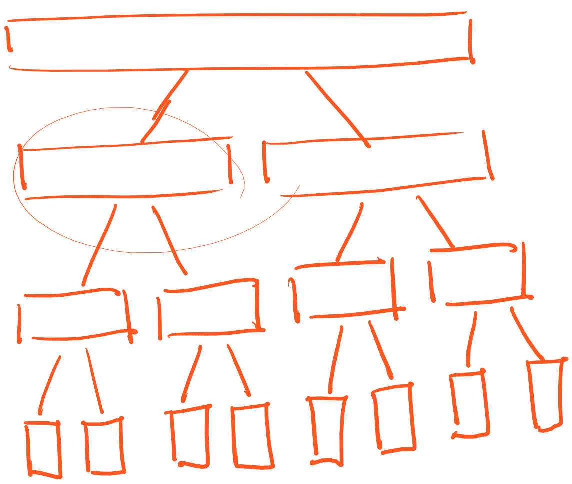
Corretude do mergeSort (por indução matemática):

- Pelo caso base p >= r - 1 sabemos que nosso algoritmo devolve
  - subvetores ordenados quando estes tem tamanho menor ou igual a 1.
- Supondo que nosso algoritmo ordena um subvetor de tamanho n/2,
  - verificamos que ele ordena um vetor de tamanho n,
    - uma vez que a função intercala funciona corretamente.
- Note que é necessário provar, usando invariantes, a corretude dessa função.

Eficiência de tempo do mergeSort:

- Usamos uma árvore (binária) de recursão na análise.

nível	tam. subprob.	# subprob.
0	$n = n/2^0$	$1 = 2^0$
1	$n/2 = n/2^1$	$2 = 2^1$
2	$n/4 = n/2^2$	$4 = 2^2$
3	$n/8 = n/2^3$	$8 = 2^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$n/2^i$	2^i



$$\frac{n}{2^h} = 1 \Rightarrow 2^h = n \Rightarrow h = \lg n = \log_2 n$$

tam. subprob. nível i = $\frac{n}{2^i}$ # subprob. nível i = 2^i # níveis = $1 + \lg n$

tam. subprob. nível i = $\frac{n}{2^i}$ # subprob. nível i = 2^i # níveis = $1 + \lg n$

- Curiosidade: outra maneira de chegar ao # de níveis igual a log_2 n + 1, é:
  - no nível 0 temos n elementos no vetor,
  - log_2 n é o número de vezes que podemos dividir n por 2
    - antes dele se tornar menor ou igual a 1 (caso base).

Questão chave: qual o trabalho (não recursivo) realizado por nível da árvore?

- Uma chamada do mergeSort realiza basicamente um teste,
  - seguido de duas chamadas recursivas e uma chamada de intercala.
- Como intercala é uma função com eficiência linear, i.e., O(tam. subvetores sendo intercalados)
  - o trabalho não recursivo realizado por mergeSort
    - num vetor de tamanho m é c * m, para alguma constante c.
- Assim, o trabalho realizado por problema do nível i é $c \cdot n/2^i$
- Portanto, o trabalho realizado por nível da árvore é dado
  - pelo número de subproblemas por nível vezes
    - o trabalho não recursivo realizado por subproblema, i.e.,

$$\text{Trab}(i) = \#\text{subprob}(i) \cdot c \cdot \frac{n}{2^i} = \cancel{2^i} \cdot c \cdot \frac{n}{\cancel{2^i}} = c\,n = O(n)$$

- Por fim, o trabalho total é dado pela soma no número de níveis da árvore
  - do trabalho realizado por nível desta,
    - i.e., \sum_{j=0..log_2 n} c*n = c*n \sum_{j=0..log_2 n} 1
      - = c*n * (1 + log_2 n) = cn log_2 n + cn = O(n log n).

$$\text{Trab. Total} = \sum_{j=0}^{\lg n} c \cdot n = c \cdot n\,(1 + \lg n) = O(n \cdot \lg n)$$

- Numa comparação rápida, para n = 10^6 e 10^9 temos:

n	10^6	10^9
$\lg n$	20	30
$n \lg n$	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{10}$
n^2	10^{12}	10^{18}

- Supondo um computador de 10 GHz (i.e., 10^10 operações por segundo),
  - quanto tempo um algoritmo de ordenação O(n log n) leva para
    - ordenar vetores de 10^6 e 10^9 elementos, respectivamente?
- Responda às questões anteriores para um algoritmo de ordenação O(n^2).

Estabilidade:

- Ordenação do mergeSort é estável, desde que a intercalação seja.
  - Por que? Mostre que isso vale usando indução.

Eficiência de espaço:

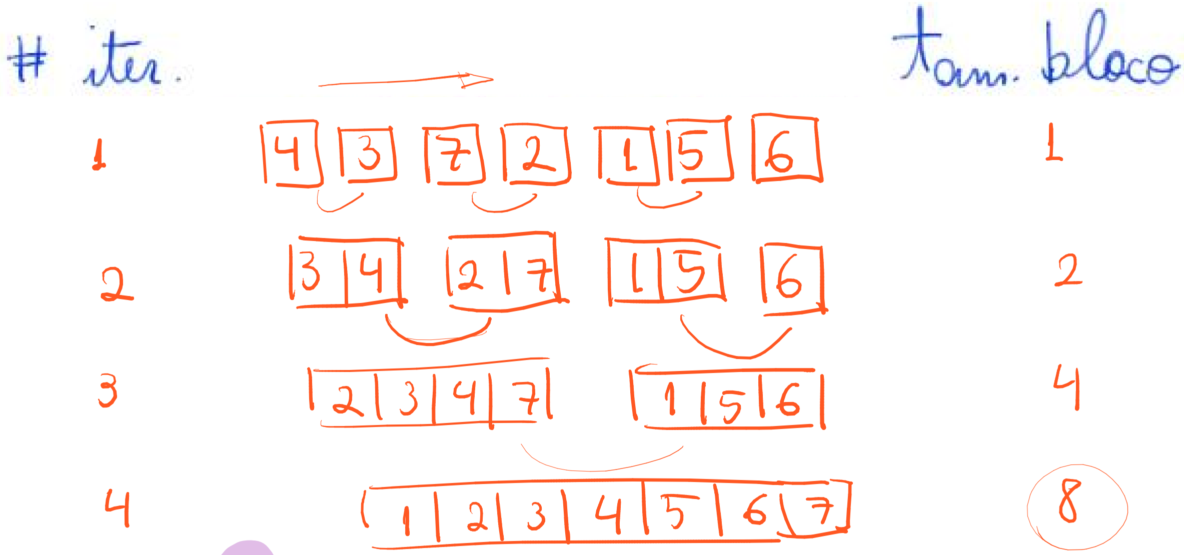
- Ordenação não é in place, pois usa a rotina intercala
  - que precisa de vetor auxiliar (e portanto memória)
    - proporcional ao tamanho dos vetores sendo intercalados.

Curiosidade:

- Podemos usar o algoritmo insertionSort como caso base do mergeSort.
- Isso é interessante porque o insertionSort tem constante menor que o mergeSort, sendo por isso mais rápido quando n é pequeno.

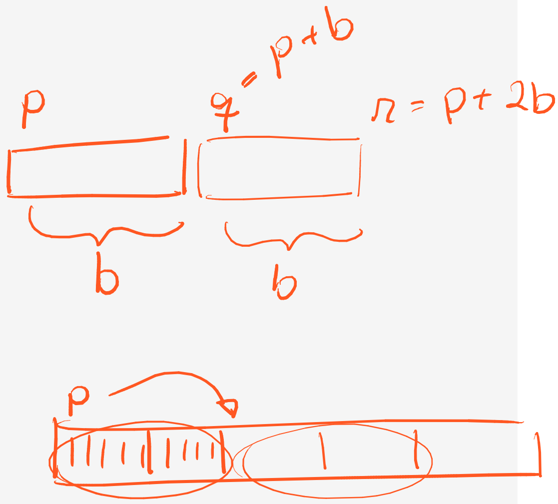
Bônus: algoritmo mergeSort iterativo,

- que em cada iteração percorre o vetor
  - intercalando pares de blocos de tamanho b.



- Note que, b dobra de tamanho a cada iteração.

```
void mergeSortI(int v[], int n) {
    int b = 1;
    while (b < n) {
        int p = 0;
        while (p + b < n) {
            int r = p + 2 * b;
            if (r > n) r = n;
            intercala1(v, p, p + b, r);
            p = p + 2 * b;
        }
        b = 2 * b;
    }
}
```



Animação:

- Visualization and Comparison of Sorting Algorithms - www.youtube.com/watch?v=ZZuD6iUe3Pc