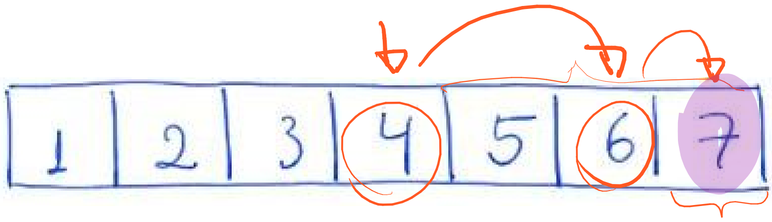
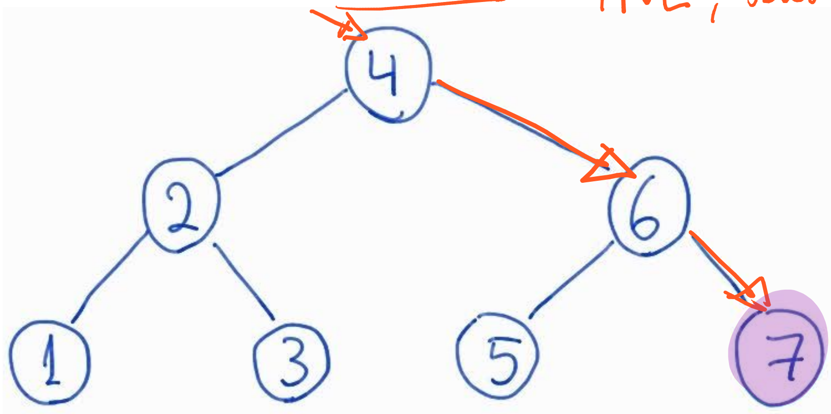
AED2 - Aula ~~07~~ 06
Hash tables, espalhamento e colisões

Para apreciar quão revolucionária é a abordagem das hash tables,
- vamos verificar o que têm em comum
  - outras implementações de tabelas de símbolos.

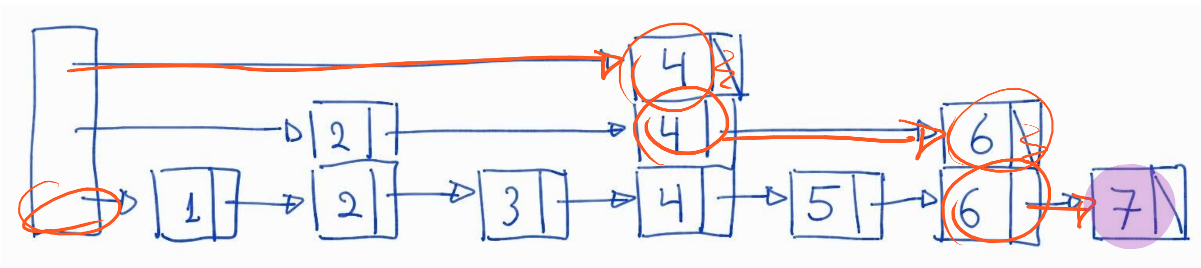
Para tanto, considere a busca pelo elemento 7 em
- um vetor ordenado usando busca binária



- uma árvore binária de busca balanceada AVL, rubro-negras



- ou em skip lists



Note que, todas são baseadas em
- manter os itens ordenados por chave
  - e em dividir o espaço de busca a cada comparação.
- Com isso, levam tempo de busca proporcional a log n,
  - sendo n o número de itens no espaço de busca.
- Isso porque, log de um número é o número de vezes
  - que este número pode ser dividido pela base.

Será que conseguimos fazer melhor utilizando uma abordagem diferente?

Será que conseguimos fazer melhor utilizando uma abordagem diferente?

- Uma ideia é utilizar um vetor diretamente indexado pelas chaves.
- Uma vantagem dessa abordagem é que o tempo de acesso
    - é constante em relação ao número de elementos, i.e., O(1).
- Se as chaves estiverem num intervalo pequeno,
    - por exemplo, inteiros entre 1 e 1000, isso é viável,
        - pois só precisamos alocar um vetor com mil posições.
- Infelizmente (ou não), esse raramente é o caso.

Como exemplo, considere que queremos criar uma lista de telefones.

- Neste caso, as chaves são os nomes das pessoas,
    - os quais, em geral, não correspondem a inteiros entre 1 e mil.
        - De fato, em geral, nomes não correspondem a inteiros :).

- Insistindo na ideia, podemos converter nomes em números inteiros.
    - Por exemplo, considerando a representação binária de cada nome.
        - Então, usamos esse número para indexar o vetor.
    - Qual o problema dessa abordagem?

- Vamos calcular o tamanho que terá o vetor resultante,
    - lembrando que todo índice deve ter uma posição correspondente.
        - No caso dos nomes, teríamos uma posição
            - para cada nome possível.
    - Considerando que cada caractere tem 26 possibilidades
        - e que um nome pode ter até 30 caracteres, o vetor teria
            - 26^30 ~= 2,81 * 10^42

$\sim= 2{,}81 \cdot (10^3)^{14}$

$\sim= 2{,}81 \cdot (2^{10})^{14} \cong 2{,}81 \cdot 2^{140}$ posições

-
    - Como comparação, o armazenamento total disponível na Terra
        - é da ordem de 10^25 bits.
- Em geral, o tamanho do vetor seria da ordem de 2^n,
    - sendo n o número de bits da chave.

O exemplo anterior deixa claro que essa abordagem é inviável.

- No entanto, existe uma estrutura de dados que sofistica essa ideia,
    - que suporta busca, inserção e remoção em tempo constante,
        - i.e., O(1),
    - e ocupa espaço proporcional ao número de elementos armazenados.
- Essa estrutura é a tabela de espalhamento ou,
    - do inglês, Hash table.

Tabelas de espalhamento (hash tables)

Trata-se de uma implementação bastante popular e eficiente
- para tabelas de símbolos.

Hash tables **propriamente implementadas** suportam operações de
- consulta, inserção e remoção muito eficientes,
  - na prática levando tempo constante por operação,
    - em relação ao número de elementos armazenados.

A eficiência das operações depende da hash table ter
- tamanho adequado,
- bom tratamento de colisões e
- uma boa função de espalhamento (hash function).

Vamos detalhar cada um desses tópicos, de baixo pra cima :).

Sobre funções de espalhamento, vale destacar que
- elas também são úteis em outros contextos, como
  - verificação de integridade de dados transmitidos e
  - validação de identificadores, como RGs e CPFs.

Queremos implementar uma tabela de símbolos para
- armazenar itens que possuem chave e valor.
- As chaves estão distribuídas num universo U bastante grande,
  - mas o conjunto de itens S é bem menor.
- Caso contrário, basta usar a ideia anterior do vetor indexado por chave.

Vamos usar um vetor de tamanho M,
- com M sendo proporcional a |S|.

Além de uma função de espalhamento (hash function)
- h: U -> {0, …, M-1}.

É importante destacar limitações das hash tables, como
- ser fácil implementar uma função de espalhamento problemática,
  - ou seja, que não espalha bem os dados.
- Além disso, por melhor que seja a função de espalhamento,
  - a hash table não tem boa garantia de eficiência no pior caso,
    - pois sempre existem conjuntos de dados patológicos.
- Por exemplo, sempre existe chance de todas as chaves em S
  - serem mapeadas para a mesma posição.
- Isso porque, estamos mapeando um conjunto universo grande U
  - para apenas M valores.
    - No mínimo, |U|/M chaves serão indexadas a cada posição.
- Por fim, ao contrário de outras implementações para tabelas de símbolos,
  - nas hash tables os dados não ficam ordenados.
- Por isso, operações como
  - mínimo, máximo, sucessor, antecessor, rank e seleção
    - não são eficientes.

Implementação das funções de espalhamento (hash functions)

vetor M

h: U → 0 .. M-1

Mínimo necessário: h deve converter cada chave para um índice do vetor, i.e.,

- h(chave) = chave % M

```
int hash(Chave chave, int M) {
   return chave % M;
}
```

   - Nesta função, chaves próximas
      - tendem a cair próximas ou na mesma posição.
- h(chave) = (a * chave + b) % M

```
int hash(Chave chave, int M) {
   return (17 * chave + 43) % M;
}
```

   - Nesta função chaves próximas são mais espalhadas,
      - mas por um fator constante.
- Além disso, em ambas os dígitos menos significativos
   - podem ser os únicos relevantes,
      - dependendo do valor de M.
   - Por exemplo, considere M = 10 ou 100.

Objetivo desejado: h deve ser

U → M

- determinística,
- rápida de calcular,
- ocupar pouco espaço e
- espalhar as chaves uniformemente pela extensão do vetor.

Isso porque, idealmente, cada chave deveria receber uma posição exclusiva,

- como no vetor indexado por chaves que nos inspirou.

Note que, uma função uniforme aleatória tem várias características que desejamos.

- Apesar disso, ela não pode ser usada. Por que?

Supondo que a chave é uma string, a seguinte função

- faz com que todo caractere tenha influência no resultado.

```
int hash(Chave chave, int M) {
   int i, h = 0;
   for (i = 0; chave[i] != '\0'; i++)
       h += chave[i];
   h = h % M;
   return h;
}
```

- No entanto, chaves próximas tendem a cair próximas
   - e caracteres com valores múltiplos de M são irrelevantes.

A seguinte função tenta melhorar esses aspectos

- multiplicando cada caractere por um número primo.

"primo" = 8 $\quad$ mdc{8, 12} = 4

M = 12

```
int hash(Chave chave, int M) {
   int i, h = 0;
   int primo = 127;
   for (i = 0; chave[i] != '\0'; i++)
       h += primo * chave[i];
   h = h % M;
   return h;
}
```

$8.5 \% 12 = 40 \% 12 = 40 - 3.12 = 4$

$8.9 \% 12 = 72 \% 12 = 72 - 6.12 = 0$

$8.4 \% 12 = 32 \% 12 = 32 - 2.12 = 8$

caractere . "primo" % M = mdc{"primo", M} . K, $K \in \mathbb{Z}^+$

primo = 13

M = 50

$1.13 \% 50 = 13$

$2.13 \% 50 = 26$

$3.13 \% 50 = 39$

⋮

- Vale destacar a importância do fator multiplicado ser primo com relação a M,
    - i.e., não ter divisores comuns com M.
- Caso contrário, as posições múltiplas de mdc(M, primo)
    - serão privilegiadas ou até exclusivas.

mdc{a, b} = D

$a = c_a D \qquad b = c_b . D$

- Também é importante que o primo tenha valor próximo de M.
    - Caso contrário, em pequenos intervalos de chaves,
        - as menores serão mapeadas consistentemente
            - para posições menores.

$a = q.b + a\%b$

$a\%b = a - q.b$

$= c_a.D - q.c_b.D$

$= D(a - q b)$

primo = 127

M = 50

$1.127 \% 50 = 27$

$2.127 \% 50 = 4$

$3.127 \% 50 = 31$

⋮

- Extra: lembrem que em AED1 conhecemos um algoritmo eficiente
    - para determinar se dois números têm divisores comuns.

Apesar dessas melhorias, observe que, chaves que são anagramas, ou seja,

- compostas pelos mesmos caracteres em diferentes ordens,
    - são mapeadas para a mesma posição.
- Mais ainda, quaisquer chaves cujos caracteres somam o mesmo valor
    - continuam caindo na mesma posição.

A seguinte função evita esses problemas,

- usando uma ideia inspirada na notação posicional.

```
int hash(Chave chave, int M) {
   int i, h = 0;
   int primo = 127;
   for (i = 0; chave[i] != '\0'; i++)
       h += pow(primo, i) * chave[i];
   h = h % M;
   return h;
}
```

↳ primo^i

Chegamos a uma função mais robusta quanto ao espalhamento,

- mas sua eficiência e corretude ainda podem ser melhoradas.

Vale notar que, podemos implementar uma função semelhante à anterior,

- sem usar a operação de potência. Isso porque,
  - c1*p + c2*p^2 + c3*p^3 + … = p (c1 + p (c2 + p (c3 + …)))

```c
int hash(Chave chave, int M) {
   int i, h = 0;
   int primo = 127;
   for (i = 0; chave[i] != '\0'; i++)
       h = (h * primo + chave[i]);
   h = h % M;
   return h;
}
```

- Note que, esta função tem a mesma ideia da notação posicional,
  - mas os índices menores são multiplicados pelas maiores potências.
- Uma preocupação é que, em todas as nossas funções,
  - o valor de h pode crescer tanto
    - a ponto de ocorrer erro numérico de estouro de variável.

Para evitar esse tipo de erro, podemos usar

- a seguinte propriedade do resto
  - (a + b) % M = (a % M + b % M) % M.
- Assim, chegamos à seguinte função de espalhamento

```c
int hash(Chave chave, int M) {
   int i, h = 0;
   int primo = 127;
   for (i = 0; chave[i] != '\0'; i++)
       h = (h * primo + chave[i]) % M;
   return h;
}
```

Eficiência de tempo:

- Nossas funções tem eficiência proporcional ao número de dígitos da chave.
  - Por isso, podem não ser eficientes com chaves muito grandes.
- Mas, com relação ao número de itens na nossa tabela,
  - o tempo é constante, i.e., O(1).

Funções de espalhamento de referência:

- FarmHash, MurmurHash3, SpookyHash, MD5

Testar o desempenho de diferentes funções de espalhamento (suas ou da literatura)

- com os dados do seu problema é essencial para realizar uma boa escolha.

Colisões são inevitáveis

Uma colisão ocorre quando a função h mapeia duas chaves diferentes

- para a mesma posição do vetor.

Nosso esforço para projetar uma boa função de espalhamento

- objetivou justamente minimizar o número de colisões.
    - Apesar desse esforços, colisões não são apenas inevitáveis,
        - mas são comuns.

Para obter intuição sobre isso, considere o “paradoxo” do aniversário.

- Nesse, temos um grupo de pessoas numa sala e queremos saber
    - a chance de ao menos duas fazerem aniversário no mesmo dia.
- Num grupo com n pessoas e um ano com 365 dias, a chance
    - de um par específico de pessoas aniversariar no mesmo dia é 1/365.
- Mas, temos $\binom{n}{2} = C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ pares
- Assim, a probabilidade de ocorrer alguma colisão é ~= (1/365)*(n^2/2).

$$Pr(\text{colisão}) = \frac{n^2}{2} \cdot Pr(\text{1 par colidir}) = \frac{n^2}{2 \cdot 365}$$

$$Pr(\text{colisão}) = 1/\cancel{2} = n^2/\cancel{2}\,.365 \Rightarrow n^2 = 365$$

$$n = \sqrt{365} \approx 19$$

- Onde está o erro/abuso da expressão acima?
    - Probabilidade da união não é igual à soma das probabilidades.

Generalizando a fórmula anterior, trocamos o número de dias no ano por M.

- Assim, a probabilidade de uma colisão é 1/2 quando n ~= raiz(M) $= \sqrt{M}$
    - e é muito provável encontrar colisões quando n ~= 2 raiz(M). $= 2\sqrt{M}$
- Note que, para M grande, digamos 10^6, (1 milhão)
    - devemos encontrar as primeiras colisões quando

$$2.\sqrt{M} = 2\sqrt{10^6} = 2.10^3 \approx 2 \text{ mil elementos}$$

- elementos forem inseridos na tabela.
    - Ou seja, quando apenas 0,2% da tabela estiver ocupada.