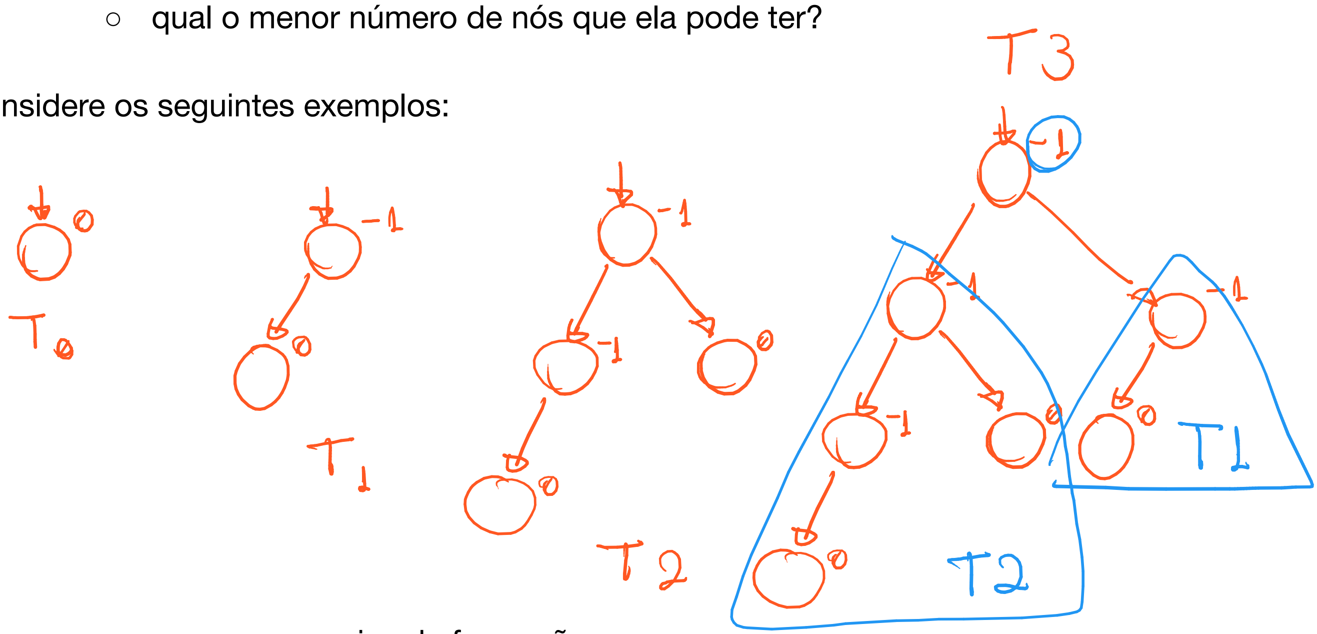
Árvores AVL: altura máxima e remoção, crescimento de funções

Altura máxima de árvores AVL

Quão esparsa pode ser uma árvore AVL?

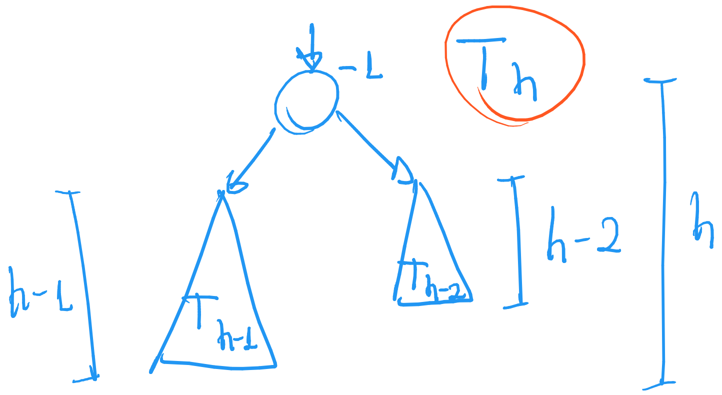
- Isto é, dada uma árvore AVL de altura h
  - qual o menor número de nós que ela pode ter?

Considere os seguintes exemplos:



Observe que, a regra recursiva de formação

- dessas árvores AVL esparsas/desbalanceadas é



- ou seja, T_h é composta por um nó raiz cujo
  - filho esquerdo é T_{h-1}
  - e o filho direito é T_{h-2}
- Ou seja, os filhos são árvores AVL com o menor número de nós possível.

Seja N(h) o número de nós da árvore T_h . Temos que

- N(0) = 1
- N(1) = 2
- Para h >= 2, N(h) = $1 + N(h-1) + N(h-2)$

Note que, N(h) é o menor número de nós que uma árvore AVL de altura h pode ter.

Sendo N(h) = N(h - 1) + N(h - 2) + 1 para h >= 2, vamos expandir essa recorrência

- N(0), N(1), N(2), N(3), N(4), N(5), N(6), ...
- 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, ...
  - Enxergam um padrão?

Vamos comparar com a expansão da sequência de Fibonacci

- Fib(0), Fib(1), Fib(2), Fib(3), Fib(4), Fib(5), Fib(6), Fib(7), Fib(8), ...
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Comparando as sequências podemos perceber que

- N(h) = $Fib(h+2) - 1$
  - o que pode ser provado usando indução matemática.

Mas, Fib(h + 2) >= $2^{h/2} = (2^{1/2})^h \approx 1{,}41^h$

- Para verificar isso, perceba que
  - Fib(h + 2) = $Fib(h+1) + Fib(h) \geq 2 Fib(h)$
- Ou seja, a cada dois incrementos no índice
  - o valor na sequência de Fibonacci pelo menos dobra.

Assim, seja n o número de nós de uma árvore AVL de altura h. Temos que

$$n \geq N(h) = Fib(h+2) - 1 \geq 2^{h/2} - 1$$

- Logo $2^{h/2} \leq n+1$
- Aplicando lg dos dois lados $h/2 \leq lg(n+1)$
- Portanto $h \leq 2 lg(n+1)$
- Ou seja, a altura de uma árvore AVL é no máximo
  - i.e., $O(\log n)$

Bônus:

- É possível fazer uma análise mais precisa
  - em que mostramos que $\boxed{\text{Fib(h) >= 1,618\^{}h,}}$
    - valor que deriva da razão áurea.
- Usando esse limitante inferior mais preciso para Fib(h) temos

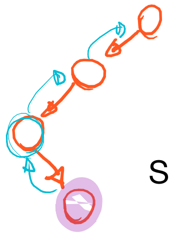
$$n \geq N(h) = Fib(h+2) - 1 \geq 1{,}618^{h+2} - 1$$

$$1{,}618^{h+2} \leq n+1 \Rightarrow h+2 \leq \log_{1{,}618}(n+1)$$

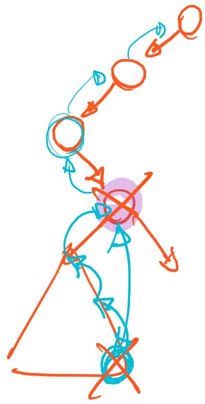
$$h+2 \leq lg(n+1) / lg\, 1{,}618 \cong 1{,}44\, lg(n+1)$$

- Portanto,

$$h \leq 1{,}44\, lg(n+1) = O(\log n)$$



Algoritmos e Estruturas de Dados 2 (AED2)
Árvores AVL: remoção com códigos



Similar aos casos da inserção, mas um tanto mais complexo.

Supomos que o algoritmo recursivo de remoção começa
- transformando, se necessário, a remoção do nó alvo
  - na remoção de um nó com no máximo um filho,
    - como ocorre nas árvores binárias de busca comuns.
- Então, analisamos o que precisa ser feito na volta da recursão,
  - quando a altura de uma das subárvores diminui após uma remoção.

remover

d a

remover AVL 1

```
Arvore remover(Arvore r, Chave chave)
{
    Noh *alvo = NULL;
    int diminuiu_altura;
    return removeAVL(r, chave, &alvo, &diminuiu_altura);
    // return removeR(r, chave, &alvo);
}
```

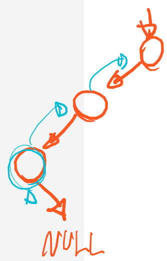
removeAVL 2

```
// recebe uma árvore r e uma chave "chave"
// remove nó com chave "chave" da árvore r
// devolve nova raiz da árvore
Arvore removeAVL(Arvore r, Chave chave, Noh **palvo, int
*pdiminuiu_altura)
{
    Noh *aux;
    int desceu_esq;

    if (*palvo == NULL)
    { // ainda não encontrei o nó que desejo remover

        if (r == NULL)
            return NULL; // a chave alvo não está na árvore
```

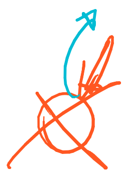
if [busca chave

else [pega maior

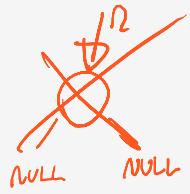
[rebalanceamento

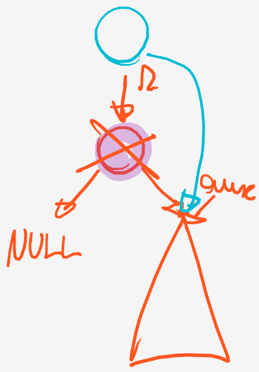


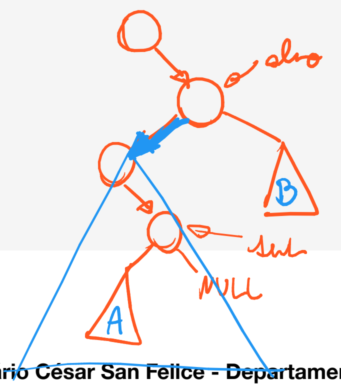
Caso 1 do rebalanceamento: se o nó atual é o alvo,
- lembrando que ele tem no máximo um filho,
  - remova o nó,
  - corrija a subárvore resultante,
  - e devolva que a altura

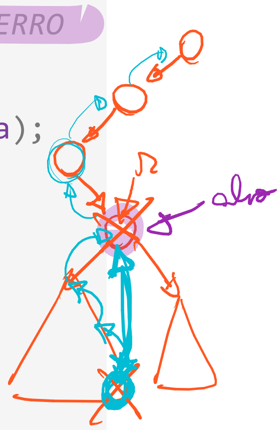


```
if (chave == r->chave)
{ // se encontrou a chave alvo nesse nível
    *palvo = r;

    if (r->esq == NULL && r->dir == NULL)
    { // se nó alvo é folha
        // printf("Caso 1 da remoção\n");
        free(r);
        *pdiminuiu_altura = 1;
        return NULL;
    }

    if (r->esq == NULL || r->dir == NULL)
    { // se nó alvo tem um único filho
        // printf("Caso 2 da remoção\n");
        if (r->esq == NULL)
            aux = r->dir;
        else // r->dir == NULL
            aux = r->esq;
        free(r);
        *pdiminuiu_altura = 1;

        return aux;
    }

    // se nó alvo tem dois filhos
    // printf("Caso 3 da remoção\n");
    // remove nó alvo trocando ele com maior nó da subárvore esquerda
    // (*palvo)->esq = removeR(r->esq, -1, palvo); // ERRO PERIGOSO
    aux = removeAVL(r->esq, -1, palvo, pdiminuiu_altura);
    r = *palvo;
    desceu_esq = 1;
    r->esq = aux;
    // return r;
}
```

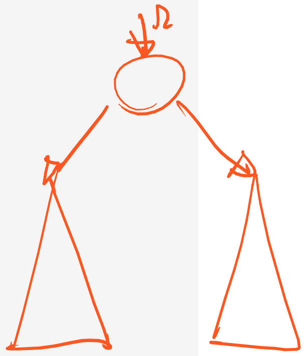


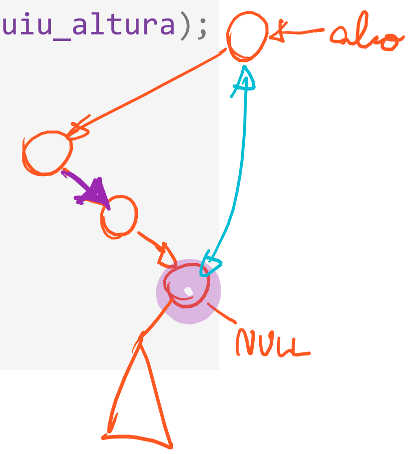




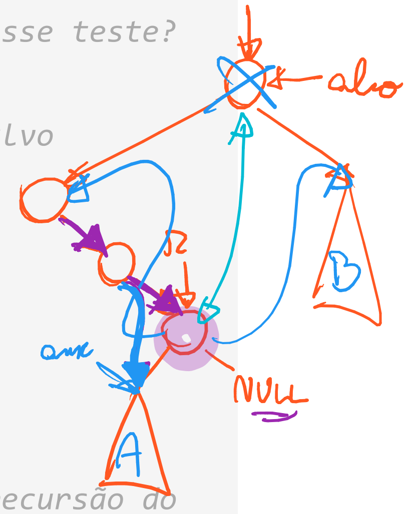


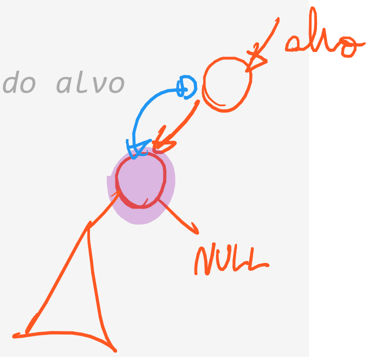
```
        else // se não encontrou a chave alvo nesse nível
        {
            if (chave < r->chave)
            { // desce na árvore à esquerda
                r->esq = removeAVL(r->esq, chave, palvo,
pdiminuiu_altura);
                desceu_esq = 1;
            }
            else
            { // r->chave > chave - ou à direita
                r->dir = removeAVL(r->dir, chave, palvo,
pdiminuiu_altura);
                desceu_esq = 0;
            }
            // return r;
        }
    }
    else // *palvo != NULL
    {    // encontrei o nó que desejo remover e estou procurando com
quem trocá-lo

        if (r->dir != NULL) // descendo à direita em busca do maior
        {
            // Quiz1: por que passei -1 como chave?
            r->dir = removeAVL(r->dir, -1, palvo, pdiminuiu_altura);
            desceu_esq = 0;
            // return r;
        }
        else // r->dir == NULL
        {
```





```c
            // encontrei o maior elemento da subárvore esquerda pra trocar com o alvo
            printf("chave do predecessor do alvo = %d\n", r->chave);
            if (r != (*palvo)->esq) // Quiz2: por que esse teste?
            {
                // trocando nó alvo com r e removendo alvo
                r->dir = (*palvo)->dir;
                aux = r->esq;
                r->esq = (*palvo)->esq;
                r->bal = (*palvo)->bal;
                free(*palvo);
                *pdiminuiu_altura = 1;
                *palvo = r; // necessário na volta da recursão do caso 3 da remoção
                return aux;
            }
            else // r == (*palvo)->esq - Quiz2: qual é esse caso?
            {
                // trocando nó alvo com r e removendo alvo
                r->dir = (*palvo)->dir;
                aux = r->esq;
                r->bal = (*palvo)->bal;
                free(*palvo);
                *pdiminuiu_altura = 1;
                *palvo = r; // necessário na volta da recursão do caso 3 da remoção
                return aux;
            }
            // return aux e outras linhas comuns podiam vir pra cá
        }
    }
```





Agora vamos tratar da volta da recursão.

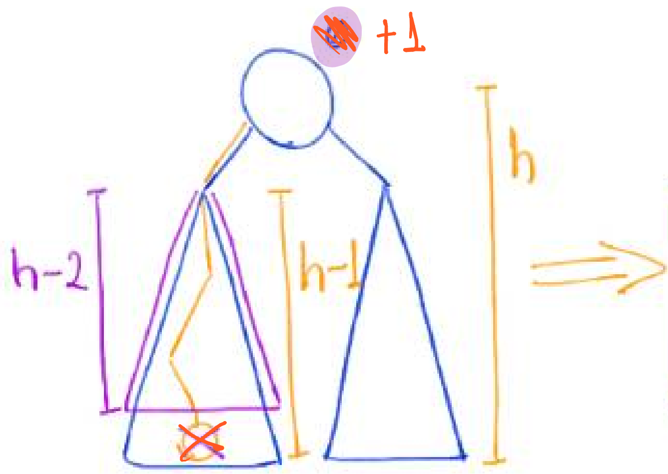
Caso 0 do rebalanceamento: se a altura da subárvore em que ocorreu a remoção não diminuiu,

- o algoritmo não precisa realizar correções
- e devolve que a altura da sua árvore não diminuiu.

Já quando a altura de uma das subárvores diminui após uma remoção.

```
    if (*pdiminuiu_altura == 1)
    { // corrigir balanceamento em cada caso

        if (desceu esq == 1)
        { // casos em que a remoção ocorreu à esquerda de r

```

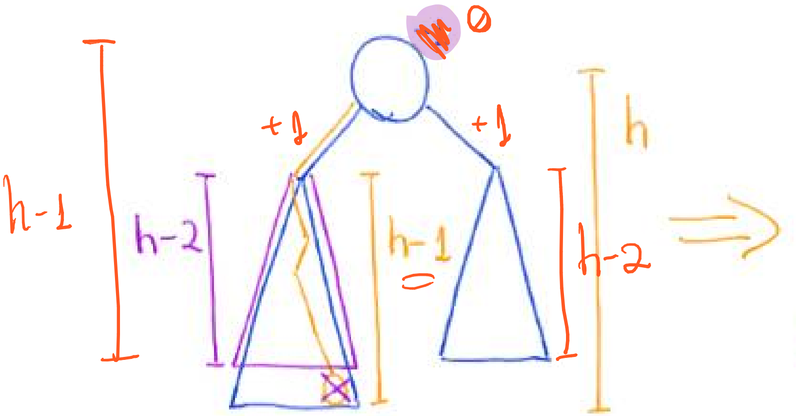
Caso 2 do rebalanceamento: se a altura das duas subárvores era igual (i.e., balanceamento da raiz era 0) e a altura da subárvore em que ocorreu a remoção diminuiu,



- corrige o fator de balanceamento
- e devolve que a altura da sua árvore Não diminui

```
            if (r->bal == 0)
            { // caso 2 do rebalanceamento - subárvore r estava
balanceada
                r->bal = +1;
                *pdiminuiu_altura = 0;
                // raiz da subárvore não mudou
            }
```

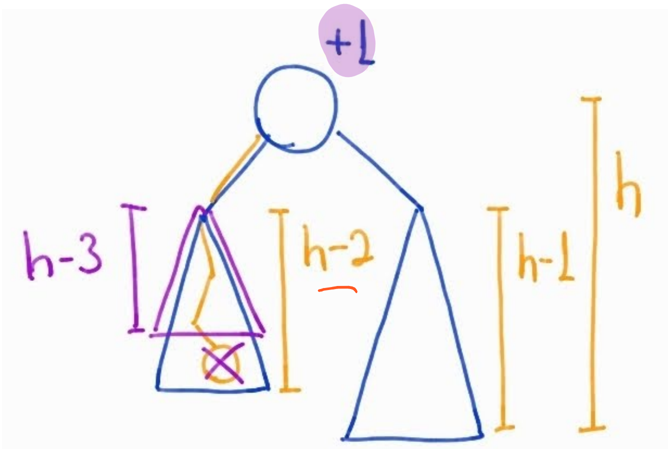
Caso 3 do rebalanceamento: se removeu da subárvore mais alta e a altura desta diminuiu



- corrige o fator de balanceamento para 0
- e devolve que a altura da sua árvore diminuiu

```
            else if (r->bal == -1)
            { // caso 3 do rebalanceamento
                r->bal = 0;
                *pdiminuiu_altura = 1;
                // raiz da subárvore não mudou
            }
```

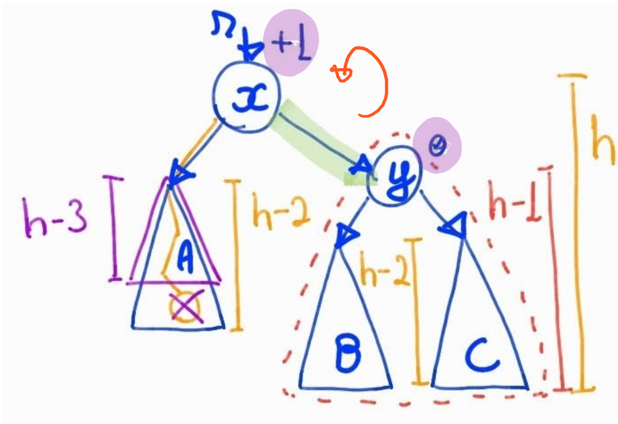
Caso 4 do rebalanceamento: se removeu da subárvore mais baixa e a altura diminuiu

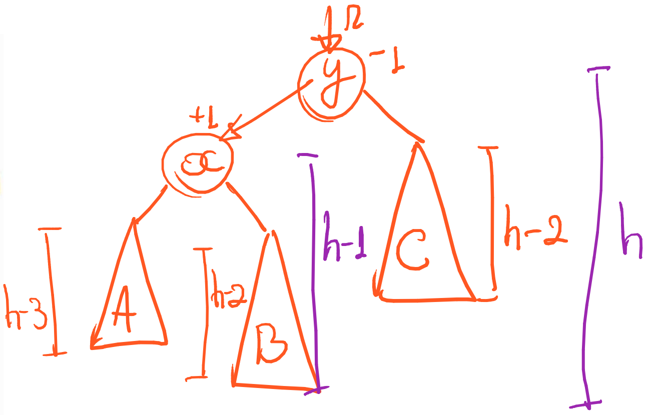


- é preciso realizar uma ou mais rotações para restaurar a propriedade AVL.

```
            else // r->bal == +1
            {    // caso 4 do rebalanceamento
```

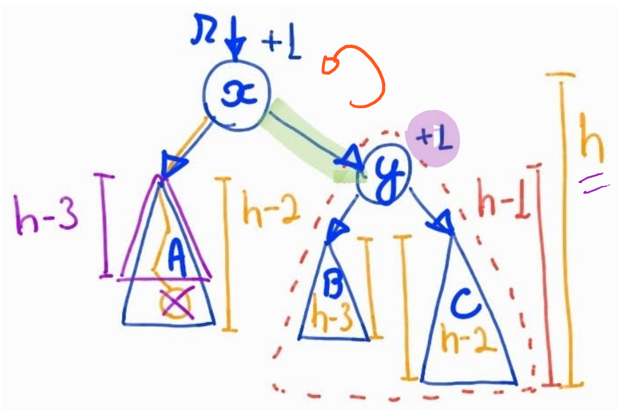
- Caso 4.1 do rebalanceamento: fator de balanceamento 0 na raiz da subárvore mais alta.

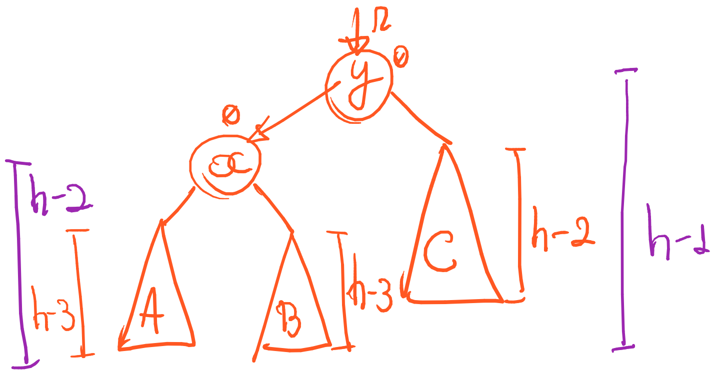





```
if (r->dir->bal == 0)
{ // caso 4.1 do rebalanceamento
    r = rotacaoEsq(r);
    // raiz da subárvore mudou
    r->esq->bal = +1; // suplérfuo
    r->bal = -1;
    *pdiminuiu_altura = 0;
}
```

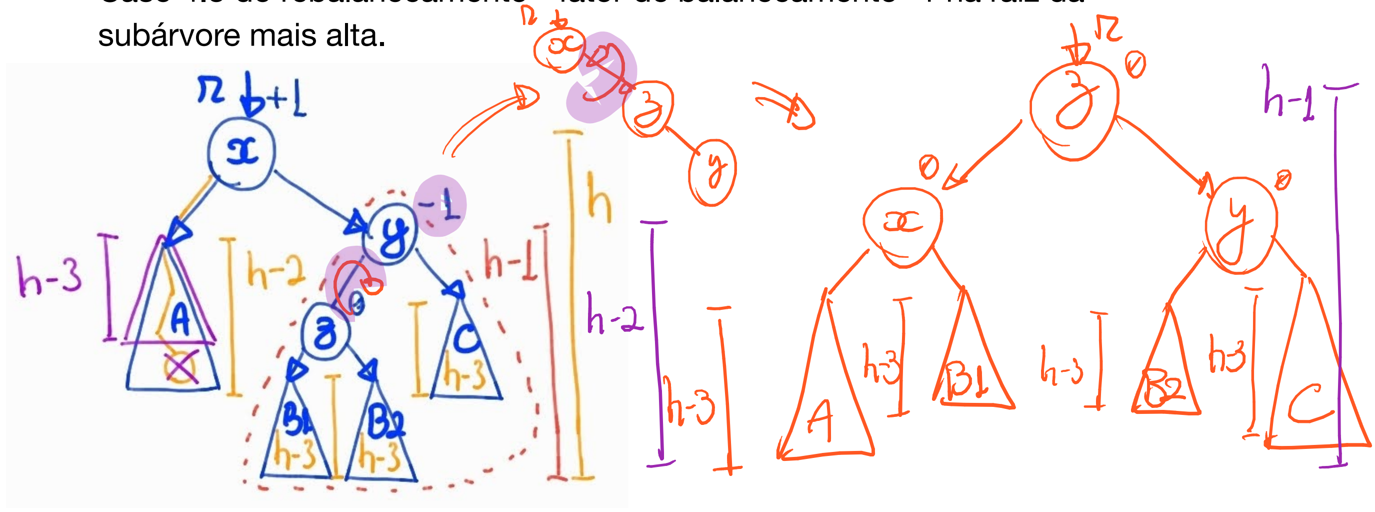
- Caso 4.2 do rebalanceamento - fator de balanceamento +1 na raiz da subárvore mais alta.






```
else if (r->dir->bal == +1)
{ // caso 4.2 do rebalanceamento
    r = rotacaoEsq(r);
    // raiz da subárvore mudou
    r->esq->bal = 0;
    r->bal = 0;
    *pdiminuiu_altura = 1;
}
```

- Caso 4.3 do rebalanceamento - fator de balanceamento -1 na raiz da subárvore mais alta.



  - Quiz3: se o fator de balanceamento de z for -1/+1,
    - como ficam os balanceamentos de x e y após as rotações?

```
                else // r->dir->bal == -1
                {    // caso 4.3 do rebalanceamento
                    r->dir = rotacaoDir(r->dir);
                    r = rotacaoEsq(r); // raiz da subárvore mudou
                    if (r->bal == 0) {
                        r->esq->bal = 0;
                        r->dir->bal = 0;
                    }
                    else if (r->bal == -1) {
                        r->esq->bal = 0;
                        r->dir->bal = +1;
                    }
                    else { // r->bal == +1
                        r->esq->bal = -1;
                        r->dir->bal = 0;
                    }
                    *pdiminuiu_altura = 1;
                }
            }
        }
        else // desceu_esq == 0
        {    // casos em que a remoção ocorreu à direita de r
             // preencher essa parte é um bom exercício
        }
    }
    return r;
}
```

Note que, realizamos um número de operações constante por nível da árvore.

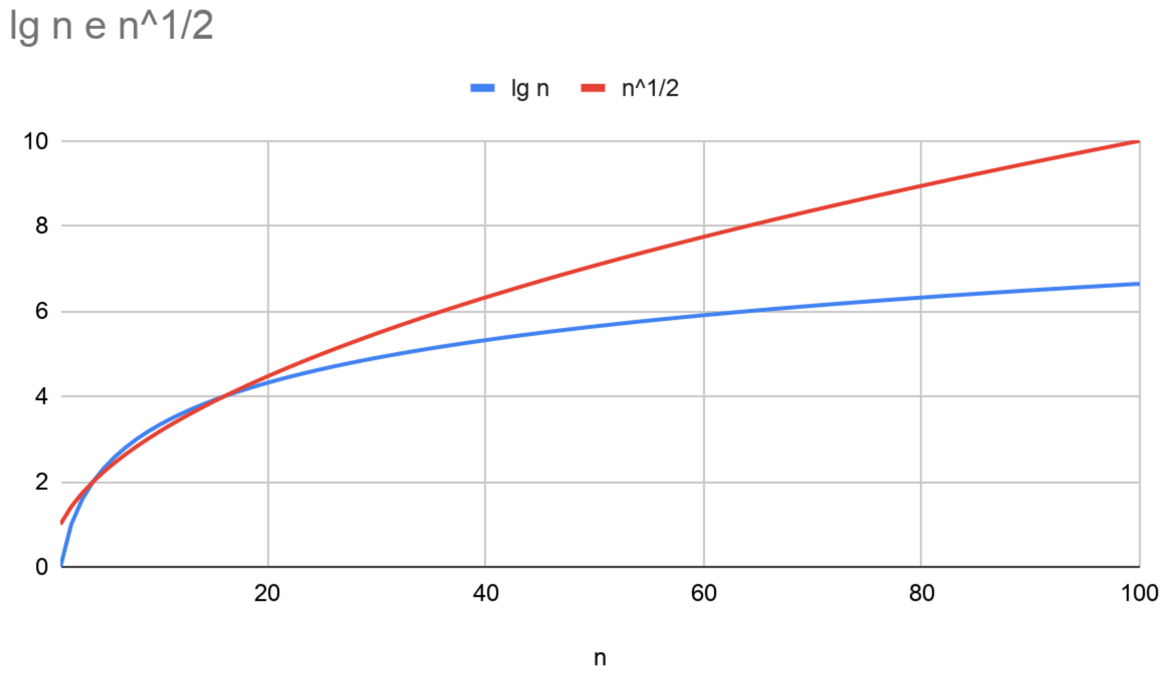
- Assim, a eficiência da remoção é proporcional à altura, i.e., O(altura).

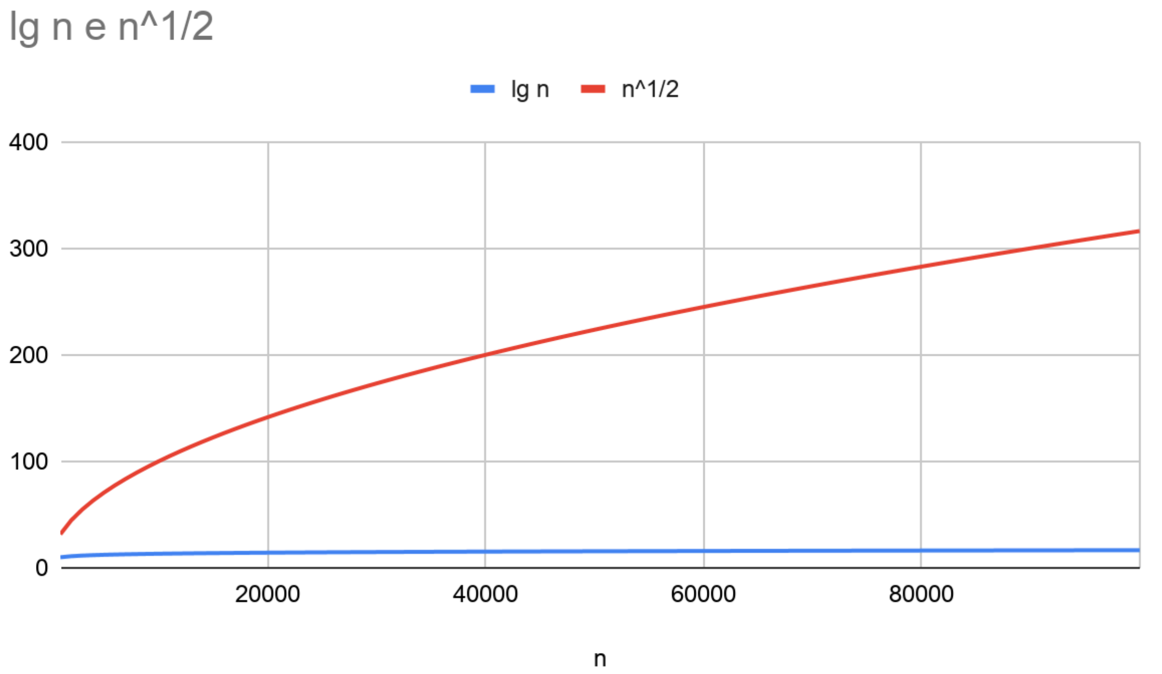
Crescimento de funções

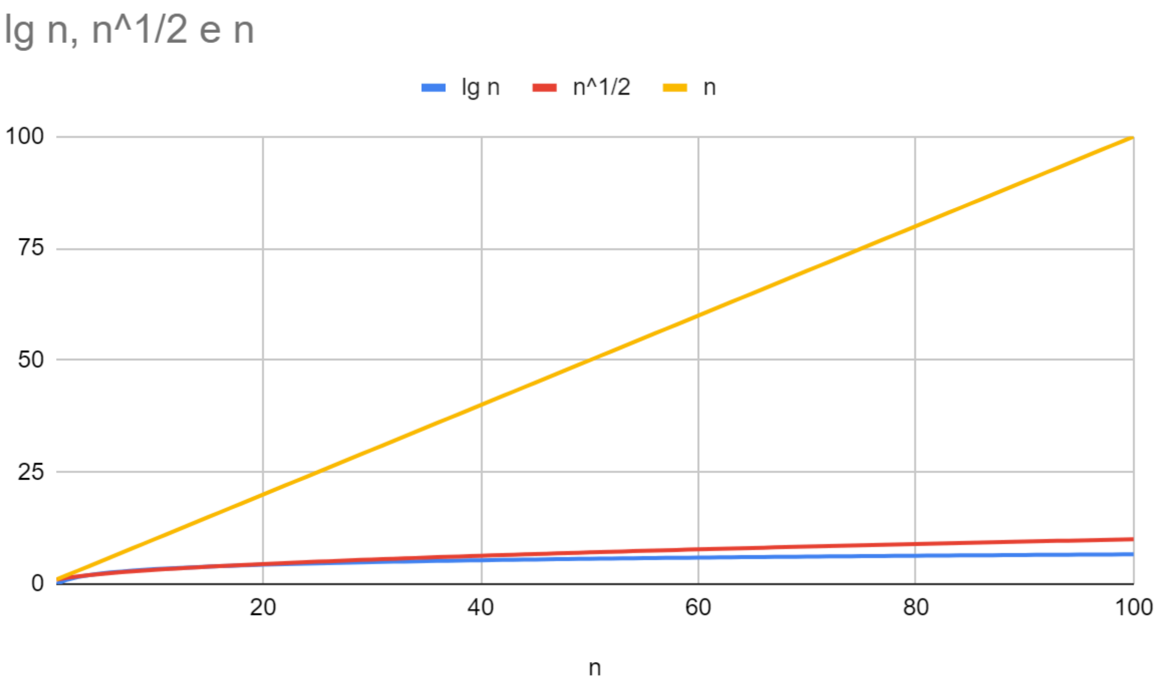
n	10^3	10^6	10^9
log_2 n	10	20	30
n^½	32	10^3	3*10^4
n	10^3	10^6	10^9
n log_2 n	10^4	2*10^7	3*10^10
n^2	10^6	10^12	10^18
n^3	10^9	10^18	10^27
2^n	10^300	10^300000	10^(3*10^8)

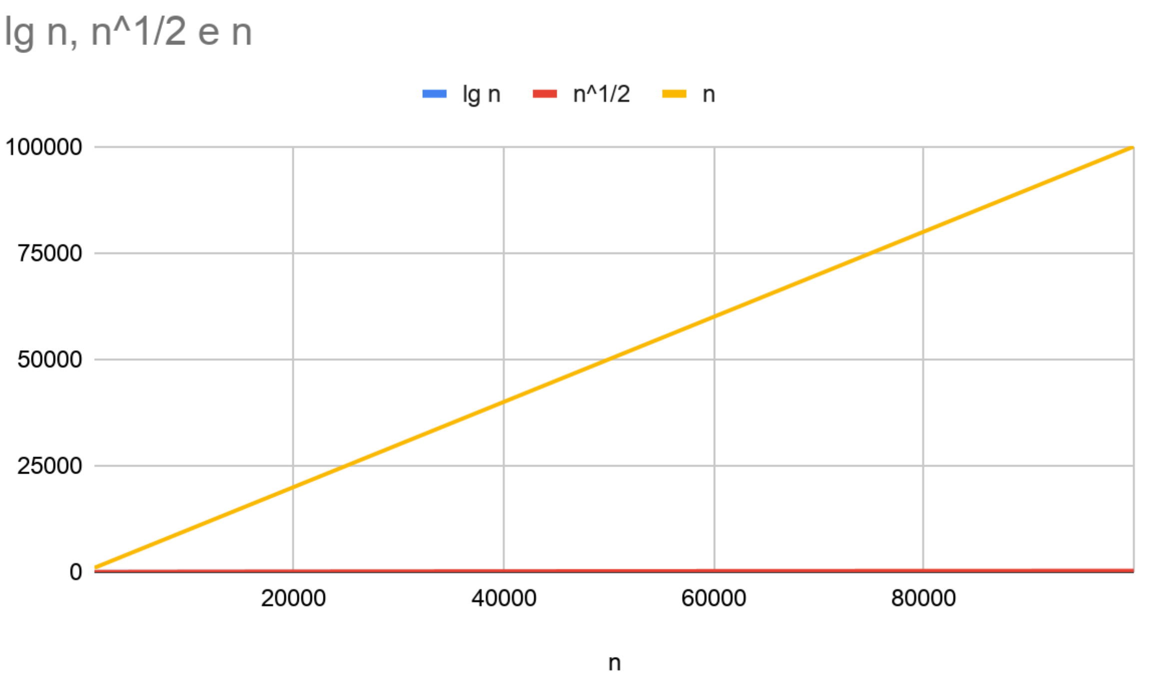
Interpretação temporal considerando um computador de 1GHz

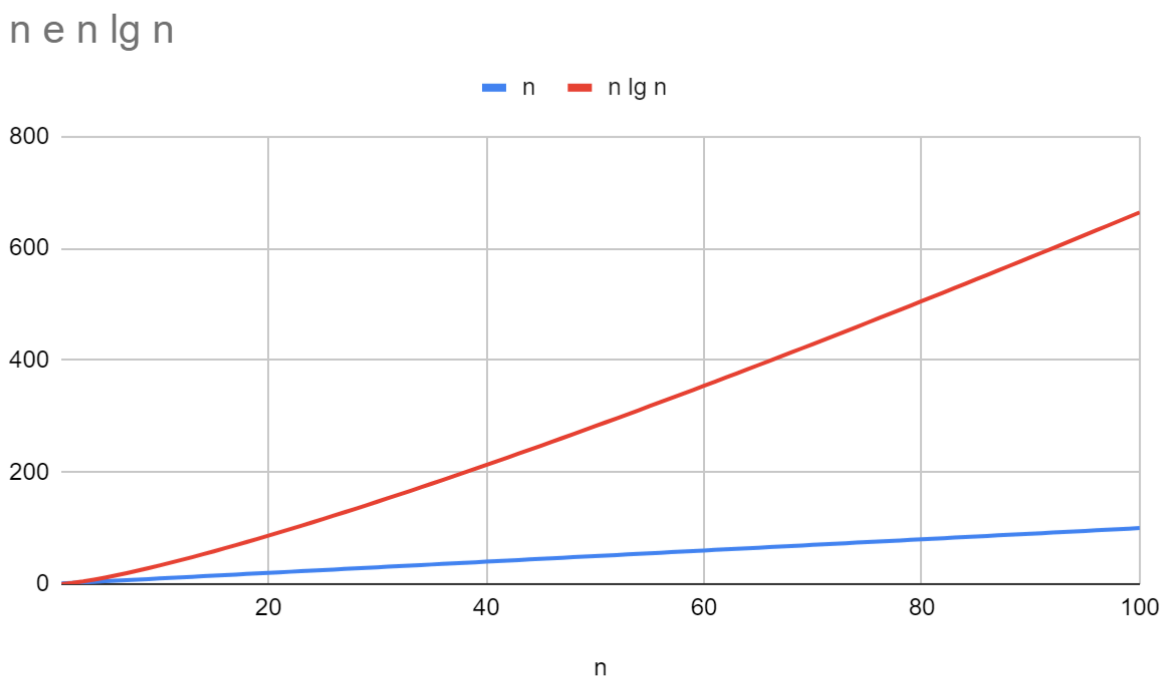
n	10^3	10^6	10^9
log_2 n	<< 1s	<< 1s	<< 1s
n^½	<< 1s	<< 1s	<< 1s
n	<< 1s	<< 1s	1s
n log_2 n	<< 1s	<1s	30s
n^2	<< 1s	16 min	31 anos
n^3	1s	31 anos	31709791 milênios
2^n	esquece...		

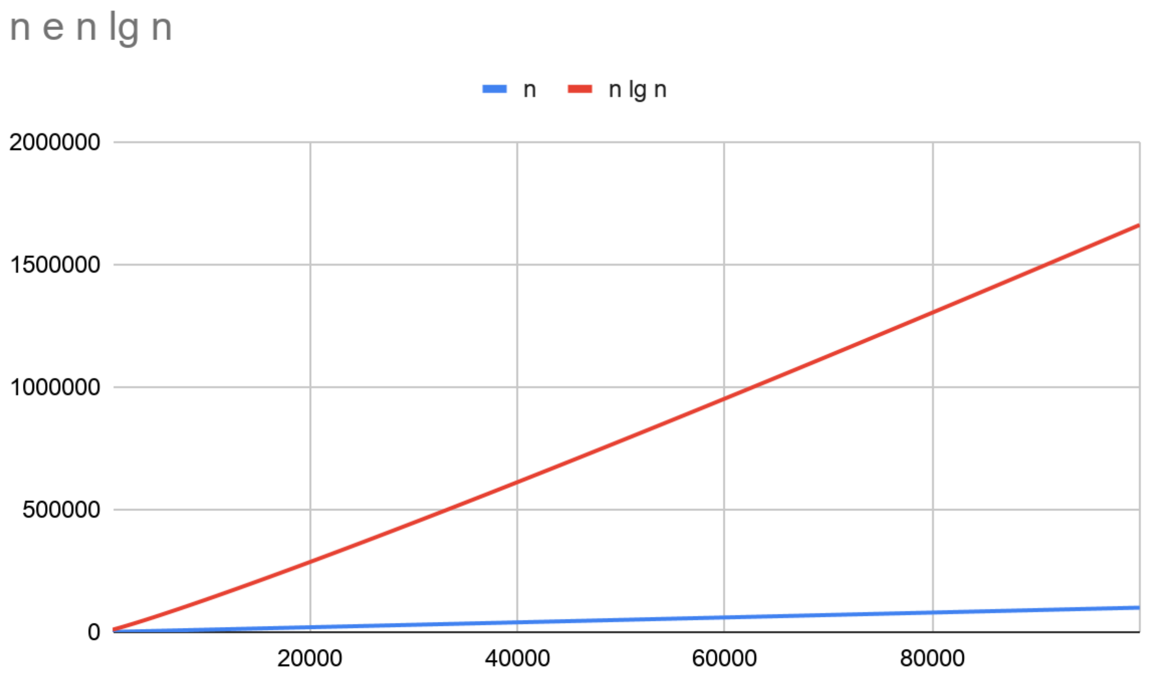

lg n e n^1/2
lg n
n^1/2
10
8
6
4
2
0
20
40
60
80
100
n

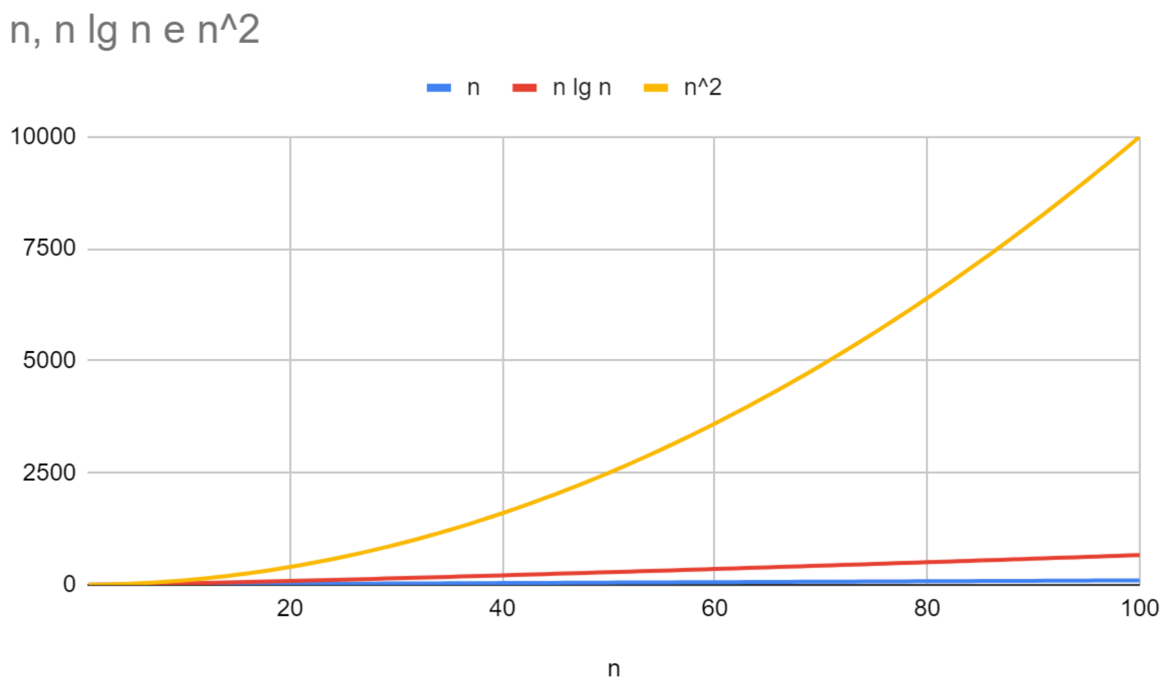

lg n e n^1/2
lg n
n^1/2
400
300
200
100
0
20000
40000
60000
80000
n

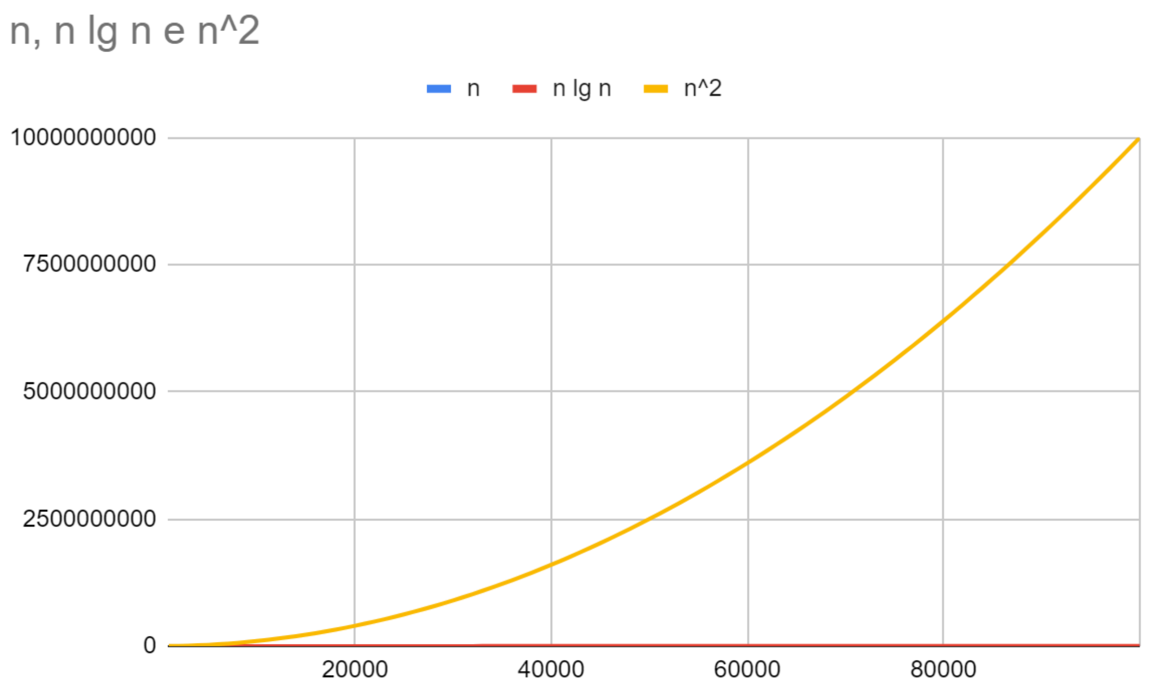

lg n, n^1/2 e n
lg n
n^1/2
n
100
75
50
25
0
20
40
60
80
100
n

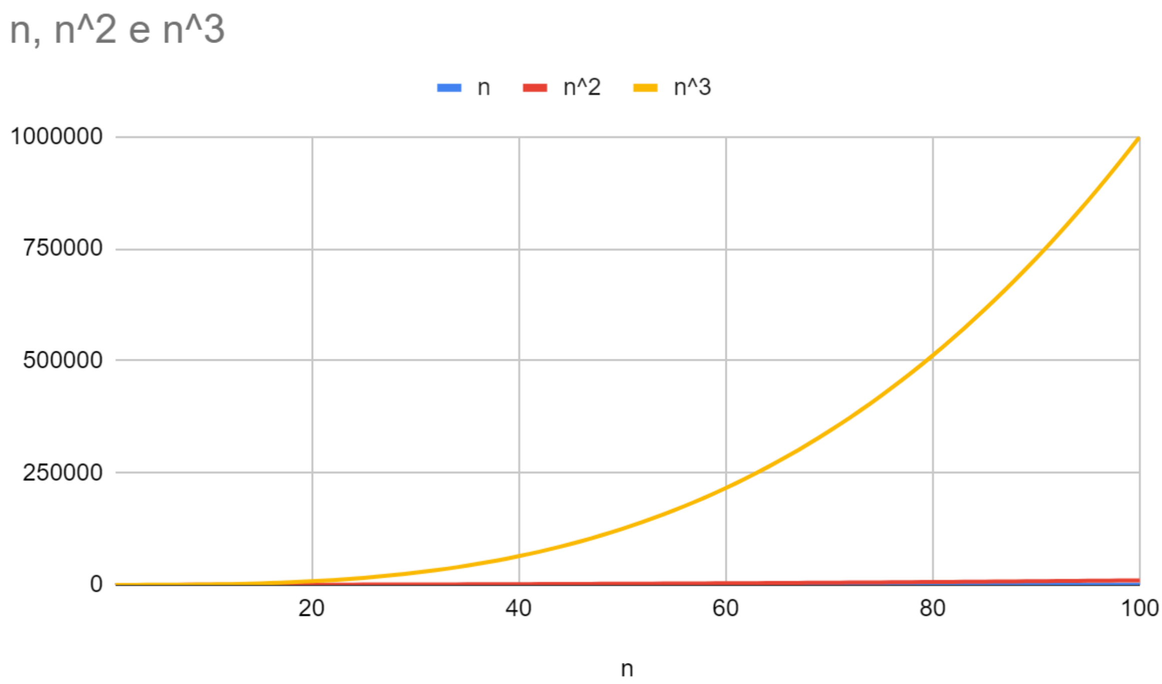

lg n, n^1/2 e n
lg n
n^1/2
n
100000
75000
50000
25000
0
20000
40000
60000
80000
n

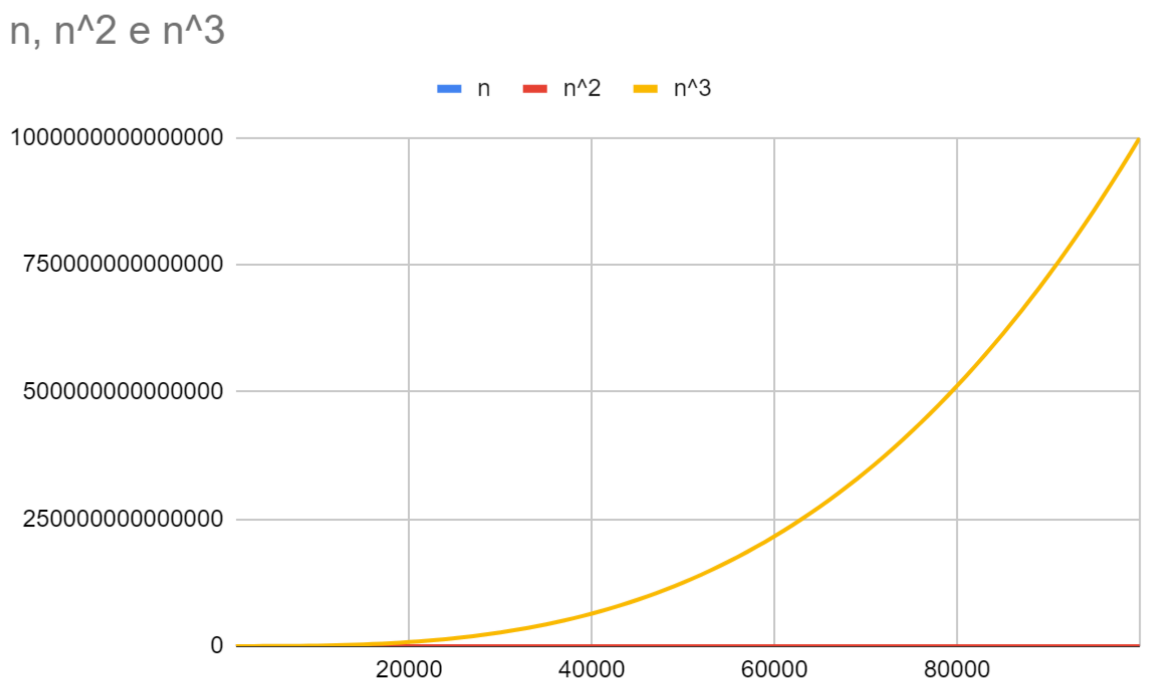

n e n lg n
n
n lg n
800
600
400
200
0
20
40
60
80
100
n

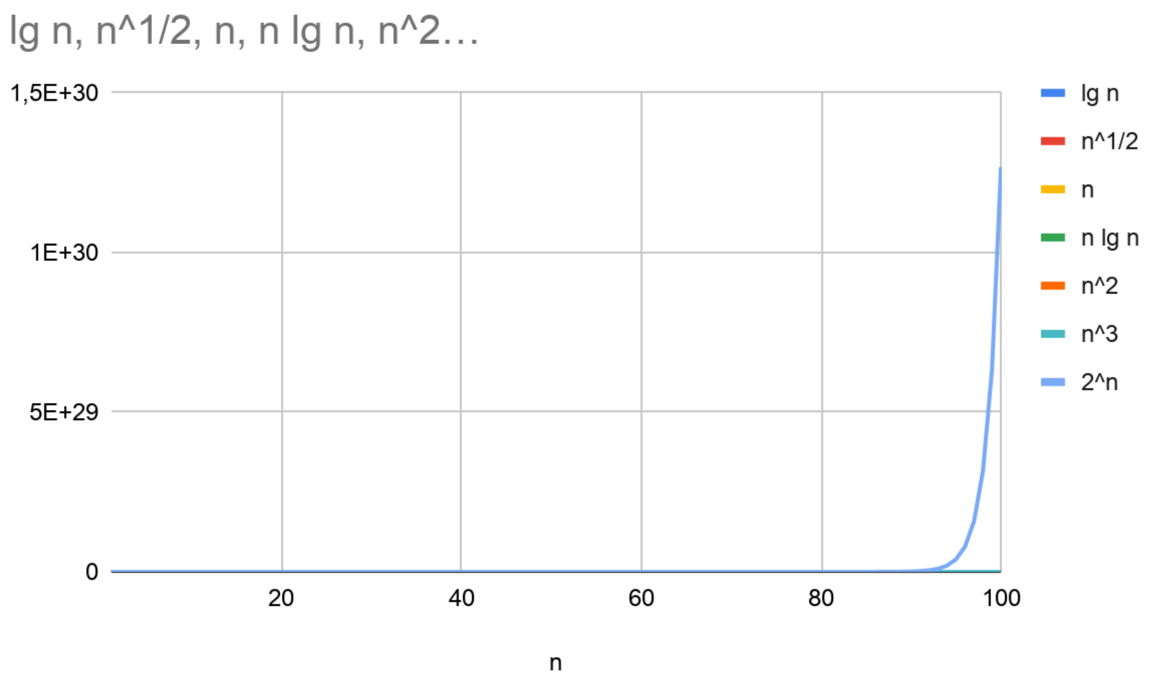

n e n lg n
n
n lg n
2000000
1500000
1000000
500000
0
20000
40000
60000
80000

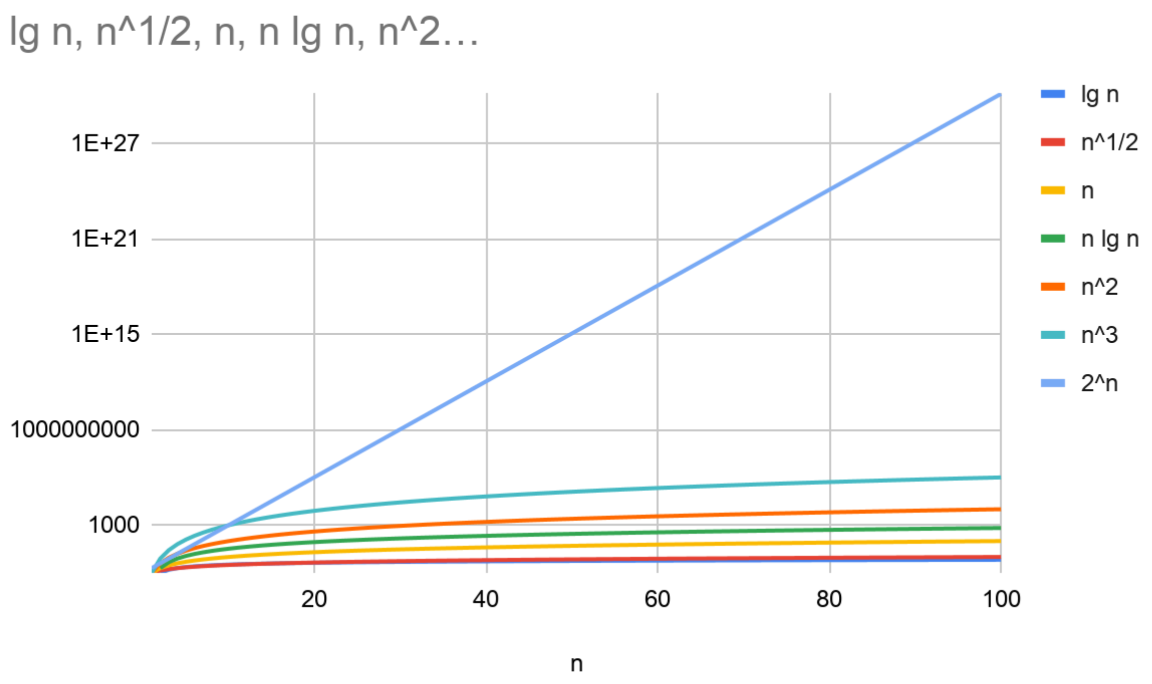

n, n lg n e n^2
n
n lg n
n^2
10000
7500
5000
2500
0
20
40
60
80
100
n


n, n lg n e n^2
n
n lg n
n^2
10000000000
7500000000
5000000000
2500000000
0
20000
40000
60000
80000


n, n^2 e n^3
n
n^2
n^3
1000000
750000
500000
250000
0
20
40
60
80
100
n


n, n^2 e n^3
n
n^2
n^3
1000000000000000
750000000000000
500000000000000
250000000000000
0
20000
40000
60000
80000


lg n, n^1/2, n, n lg n, n^2…
1,5E+30
1E+30
5E+29
0
20
40
60
80
100
n
lg n
n^1/2
n
n lg n
n^2
n^3
2^n


lg n, n^1/2, n, n lg n, n^2…
1E+27
1E+21
1E+15
1000000000
1000
20
40
60
80
100
n
lg n
n^1/2
n
n lg n
n^2
n^3
2^n