

Problemas da Mochila Inteira e do Alinhamento de Sequências

Princípios para projetar um algoritmo de programação dinâmica:

1. Imaginar uma solução ótima para o problema, com alguma estrutura/ordem.
2. Analisar esta solução genérica em busca de uma subestrutura ótima,
 - que dependa de um número pequeno de subproblemas.
3. Obter a recorrência a partir da demonstração da subestrutura ótima.
4. Derivar um algoritmo iterativo que, guiado pela recorrência,
 - preenche a tabela começando pelos subproblemas menores.
5. A solução final deve ser um valor da tabela (normalmente a última posição).

Eficiência do algoritmo vai depender do número total de subproblemas,

- que determina o tamanho e dimensões da tabela,
- e do número de termos do qual depende a recorrência.

Problema da Mochila

Na entrada do problema da mochila **inteira/binária**

- recebemos n itens, sendo que cada item i , $1 \leq i \leq n$
 - tem peso $p_i > 0$ e valor $v_i > 0$
- Também recebemos uma capacidade $C \in \mathbb{Z}^+$

Uma solução para o problema é um subconjunto $S \subseteq \{1, \dots, n\}$

- cujo peso total não ultrapassa C , i.e., $\sum_{i \in S} p_i \leq C$
 - e que **maximize** o valor total $\sum_{i \in S} v_i$

Quiz: verifiquem que o algoritmo guloso usado para a **mochila fracionária**,

- não devolve o ótimo para a seguinte entrada:

$$\begin{aligned}n &= 3 & C &= 4 \\- p_1 &= 3 & v_1 &= 7 \\- p_2 &= 2 & v_2 &= 4 \\- p_3 &= 2 & v_3 &= 4\end{aligned}$$

Vamos usar $I(n, C)$ para denotar uma entrada com n itens e capacidade C

- deixando implícito que cada item i tem valor v_i e peso p_i , para $1 \leq i \leq n$

Encontrando a subestrutura ótima

Considere uma entrada $I(m, C)$ e uma correspondente solução ótima S

- Vamos focar nossa atenção no último item m . Temos duas possibilidades:

1. $m \notin S$

2. $m \in S$

Primeiro, vamos analisar o Caso 1. Neste caso, S é uma solução ótima

- para $I(m-1, C)$, ou seja, para a mochila de mesma capacidade
 - que só pode usar os $m-1$ primeiros itens.

Prova: S é uma solução para $I(m-1, C)$, já que

- ela não usa o item m e respeita a capacidade C
- Para mostrar que ela é ótima para $I(m-1, C)$ vamos supor, por contradição,
 - que existe uma solução S^* para $I(m-1, C)$, tal que $v(S^*) > v(S)$
- S^* é solução de $I(m, C)$.
- Mas $v(S^*) > v(S)$ que é ótimo p/ $I(m, C)$ (Contradição !!!)

Neste caso, qual o valor da solução ótima S

- em função da solução ótima dos subproblemas?

$v(S) = \text{valor do ótimo p/ } I(m-1, C)$

Vamos analisar o **Caso 2**, em que m está em S . Como queremos descrever S

- com soluções ótimas de subproblemas, vamos considerar $S' = S \setminus \{m\}$
- Temos que S' só usa itens dentre os $n-1$ primeiros. Além disso,
 - como S respeita a capacidade C , i.e., $\sum_{i \in S} p_i \leq C$

- ao remover o m de S temos que S' respeita uma restrição mais forte

$$\sum_{i \in S'} p_i = \sum_{i \in S} p_i - p_m \leq C - p_m$$

- Assim, S' é uma solução ótima para $I(n-1, C-p_m)$, ou seja, para a mochila
 - de capacidade $C-p_m$ que só pode usar os $n-1$ primeiros itens.

Prova: S' é uma solução para $I(n-1, C-p_m)$, pois S'

- não usa o item m e respeita a capacidade $C-p_m$
- Para mostrar que ela é ótima para $I(n-1, C-p_m)$ vamos supor,
 - por contradição, que existe S^* melhor que S' para $I(n-1, C-p_m)$
- Note que $S^* \cup \{m\}$ é uma solução para $I(n, C)$, já que
 - respeita a capacidade C e só usa itens válidos para esta entrada.
- Como $v(S^* \cup \{m\}) = v(S^*) + v_m > v(S') + v_m = v(S)$
 - temos uma contradição, já que S era ótima para $I(n, C)$

Neste caso, qual o valor de S em função da solução ótima dos subproblemas?

$$v(S) = \text{valor do ótimo p/ } I(n-1, C-p_m) + v_m$$

Escrevendo a recorrência

Nossos subproblemas dependem

- tanto dos itens que podem ser usados na solução
 - quanto da capacidade residual da mochila.

Por isso, nossa recorrência terá dois parâmetros, i e α

- sendo que $A[i, \alpha]$ é o valor de uma solução ótima para uma mochila que
 - só pode ser preenchida usando os i primeiros itens, $i = 0, \dots, n$
 - e tem capacidade α , $\alpha = 0, \dots, C$

Seguindo a análise da subestrutura ótima, temos a seguinte recorrência

$$\Rightarrow A[i, \alpha] = \max \left\{ \underbrace{A[i-1, \alpha]}_{1^\circ \text{ caso}}, \underbrace{v_i + A[i-1, \alpha - p_i]}_{2^\circ \text{ caso}} \right\}$$

Observe que esta recorrência tem uma limitação, pois

- o segundo caso não faz sentido quando $p_i > \alpha$
 - já que a capacidade da mochila fica negativa.
- Além disso, os casos bases da recorrência ocorrem
 - quando o número de itens disponível é 0
- Neste caso, a mochila sempre terá valor 0
 - independente da capacidade.

Projetando o algoritmo de Programação Dinâmica

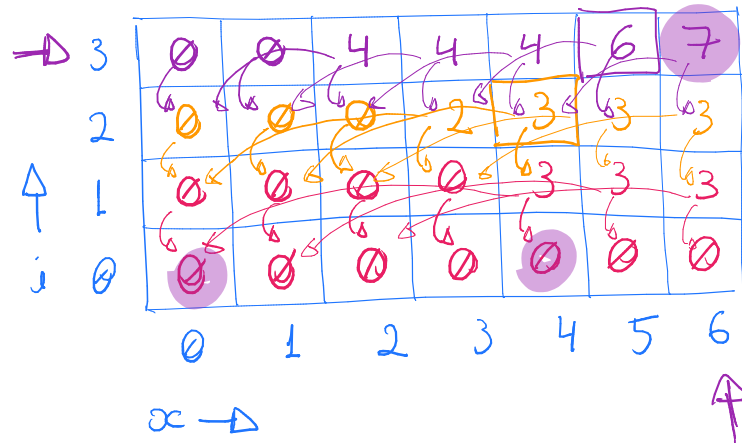
Exemplo de preenchimento da tabela:

$$n = 3 \quad C = 6$$

$$v_1 = 3 \quad p_1 = 4$$

$$v_2 = 2 \quad p_2 = 3$$

$$v_3 = 4 \quad p_3 = 2$$



$$A[i, x] = \max \left\{ \underbrace{A[i-1, x]}_{1^\circ \text{ caso}}, \underbrace{v_i + A[i-1, x - p_i]}_{2^\circ \text{ caso}} \right\}$$

Pseudocódigo do algoritmo:

mochila(n, v, p, C):

para $x = 0$ até C :

$A[0, x] = 0$

para $i = 1$ até n :

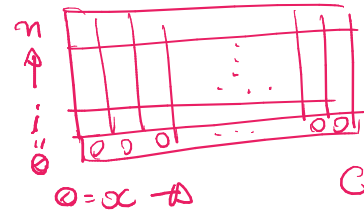
para $x = 0$ até C :

se $x < p_i$: $A[i, x] = A[i-1, x]$

senão:

$A[i, x] = \max \{ A[i-1, x], v_i + A[i-1, x - p_i] \}$

devolva $A[n, C]$



$O(n)$

$O(1)$

$O(1)$

Prova de corretude: por indução matemática usando

- como hipótese de indução a recorrência que demonstramos.

Eficiência: $\Theta(n \cdot C)$, o que faz deste algoritmo **pseudopolinomial**, já que

- o número C pode crescer como uma exponencial no tamanho da entrada.

Reconstruir a solução usa as mesmas ideias apresentadas na última aula.

Problema do Alinhamento de Sequências (ou da Distância de Edição)

Entrada: duas sequências $X = x_1 x_2 x_3 \dots x_m$ e $Y = y_1 y_2 \dots y_n$

- ambas definidas sobre um mesmo alfabeto σ
- Penalidades $\alpha(a, b) \geq 0$ paga por casar os símbolos a e b de σ
 - Em geral, se $a=b$ então $\alpha(a, b) = 0$
- Penalidade $\alpha_{gap} \geq 0$ paga por casar um símbolo com um espaço.

Solução: um alinhamento de custo mínimo.

- Um alinhamento é uma modificação das sequências originais
 - que pode inserir espaços entre símbolos,
 - mas não pode inverter ou remover quaisquer símbolos.

Exemplo 1: $X = A G G G C T$ e $Y = A G G C A$.

- Neste caso, $m = 6$, $n = 5$, $\sigma = \{A, G, C, T\}$
- Uma solução possível é

A G G G C T
A G G - C A

- e seu custo é

$$\alpha_{gap} + \alpha(T, A)$$

Note que uma solução pode envolver adição de espaços em ambas as sequências.

Exemplo 2: $X = G G T C C$ e $Y = A G G C C$.

- Neste caso, $m=5$, $n=5$, $\sigma = \{A, G, C, T\}$
- Uma solução possível é

-	G	G	T	C	C
A	G	G	-	C	C

- e seu custo é

$2 \alpha_{gap}$

Vamos usar $I(m, n)$ para denotar uma entrada

- para o problema do Alinhamento de Sequências em que:
 - a primeira sequência (X) tem m itens
 - e a segunda sequência (Y) tem n itens.
- Deixamos implícitas as penalidades α

of primos

Vamos usar o símbolo $\&$ para denotar um alinhamento, ou seja,

○ $X \& Y$ indica um alinhamento das sequências X e Y

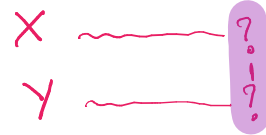
- Exatamente qual é esse alinhamento será definido pelo contexto.

Encontrando a subestrutura ótima

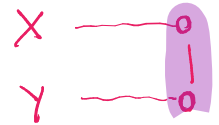
Considere uma entrada $I(m, n)$ e um correspondente alinhamento ótimo $X \& Y$

- Focando na última posição deste alinhamento, temos três possibilidades:

- x_m alinhado com y_n
- x_m alinhado com $-$
- y_n alinhado com $-$



- Não consideramos a opção espaço alinhado com espaço, pois este caso
 - se reduz a uma solução melhor (removendo a última posição).
- Sejam $X' = X - x_m$ e $Y' = Y - y_n$



Primeiro, vamos analisar o Caso 1. Neste caso o alinhamento $X' \& Y'$

- que obtemos ao remover a última posição do alinhamento ótimo $X \& Y$
 - é uma solução ótima para o subproblema $I(m-1, n-1)$

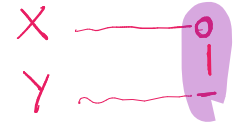
Prova: sendo P o custo do nosso alinhamento de $X' \& Y'$, por contradição,

- suponha que existe um alinhamento mais barato de X' e Y' com custo P^*
 - Quiz3: chegue num absurdo para completar a prova.

No **Caso 1**, qual o valor da solução ótima em função do ótimo dos subproblemas?

$$\alpha(x \& y) = \alpha(x' \& y') + \alpha(x_m, y_n)$$

Vamos analisar o **Caso 2**, em que x_m é alinhado com *espaço*



- Neste caso o alinhamento $x' \& y'$ obtido ao remover
 - a última posição do alinhamento ótimo $x \& y$

- é uma **solução ótima** para o subproblema $I(m-1, n)$

Prova: sendo P o custo do nosso alinhamento de $x' \& y'$, **por contradição**,

- suponha que existe um alinhamento melhor de x' e y' com custo P^*
 - **Quiz4**: chegue num absurdo para completar a prova.

No **Caso 2**, qual o valor da solução ótima em função do ótimo dos subproblemas?

$$\alpha(x \& y) = \alpha(x' \& y') + \alpha_{gap}$$

A análise do **Caso 3** é idêntica à do **Caso 2**, exceto por trocar x' por y' e y por x

Escrevendo a recorrência

Nossos subproblemas dependem tanto do tamanho da primeira sequência,

- quanto do tamanho da segunda sequência.

Por isso, nossa recorrência terá dois parâmetros, i e j

- sendo que $A[i, j]$ é o valor de uma solução ótima em que
 - a primeira sequência é o prefixo de tamanho i de X , $i = 0, \dots, m$
 - e a segunda sequência é o prefixo de tamanho j de Y , $j = 0, \dots, n$

Seguindo nossa análise da subestrutura ótima, temos a seguinte recorrência

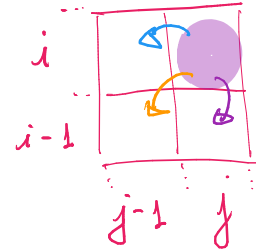
$$A[i, j] = \min \{ A[i-1, j-1] + \alpha(x_i, y_j), A[i-1, j] + \alpha_{gap}, A[i, j-1] + \alpha_{gap} \}$$

Observe que os casos base dessa recorrência ocorrem quando $i=0$ ou $j=0$

- Nestes casos, a sequência cujo prefixo não é nulo
 - terá de ser alinhada com espaços. Portanto,

$$A[i, 0] = i \cdot \alpha_{gap}, \quad 0 \leq i \leq m$$

$$A[0, j] = j \cdot \alpha_{gap}, \quad 0 \leq j \leq n$$



Projetando o algoritmo de Programação Dinâmica

Pseudocódigo do algoritmo:

alinhar $\text{Seq}(X, m, Y, n, \alpha)$:

$O(m)$ para $i = 0$ até m : $A[i, 0] = i \cdot \alpha_{\text{gap}}$

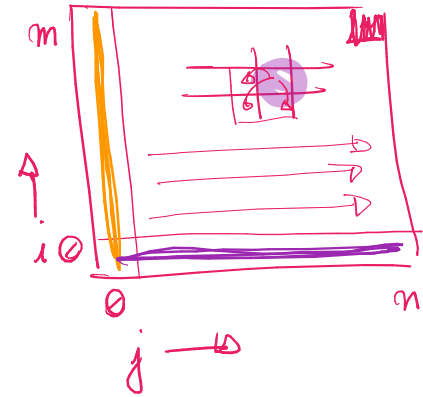
$O(n)$ para $j = 0$ até n : $A[0, j] = j \cdot \alpha_{\text{gap}}$

para $i = 1$ até m :

para $j = 1$ até n :

$O(m \cdot n)$ $A[i, j] = \min \{ A[i-1, j-1] + \alpha(x_i, y_j), A[i-1, j] + \alpha_{\text{gap}}, A[i, j-1] + \alpha_{\text{gap}} \}$ $O(1)$

devolva $A[m, n]$



Prova de corretude: por indução matemática usando

- como hipótese de indução a recorrência que demonstramos antes.

Eficiência: $O(m \cdot n)$, por conta dos dois laços aninhados

- e do fato que a recorrência pode ser resolvida em tempo constante.

Reconstruindo a solução: dada uma tabela A preenchida pelo algoritmo,

- começamos na posição $A[m, n]$ e vamos voltando de acordo
 - com o caso da recorrência usado para preencher a posição atual.

rec Sol (X, m, Y, n, α, A):

$i = m, j = n$

enquanto $i \geq 1$ e $j \geq 1$:

se $A[i, j] == A[i-1, j-1] + \alpha(X_i, Y_j)$: // 1°

X_i & $Y_j, i--, j--$

senão se $A[i, j] == A[i-1, j] + \alpha_{gap}$: // 2°

X_i & -, $i--$

senão // 3°: $A[i, j] == A[i, j-1] + \alpha_{gap}$

- & $Y_j, j--$

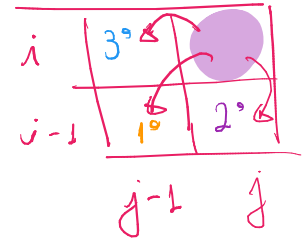
enquanto $i > 0$: X_i & -, $i--$

enquanto $j > 0$: - & $Y_j, j--$

devolva o alinhamento obtido

Eficiência: $\Theta(m+n)$, pois em cada iteração do laço principal

- pelo menos i ou j são diminuídos de uma unidade.



$\Theta(m+n)$