PAA - Aula ~~14~~ 15

Árvores Geradoras Mínimas (MST), Propriedade do Corte, Algoritmo de Prim

Minimum Spanning Tree

O problema da Árvore Geradora Mínima (MST)

- é central nas áreas de grafos e de otimização combinatória.
- Também é uma oportunidade para exercitar o projeto de algoritmos gulosos.

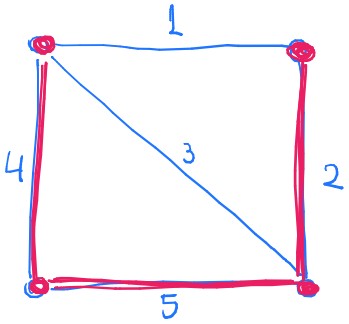
Na entrada temos um grafo $G = (V, E)$

- com custo $c(e) > 0$ em cada aresta $e \in E$

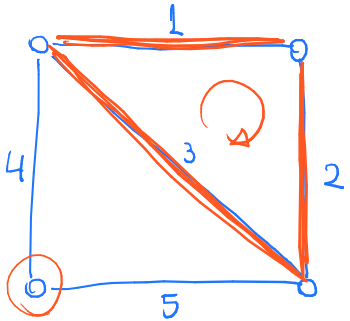
Uma solução é uma árvore geradora T de custo mínimo, isto é,

- um subgrafo conexo que não tem ciclos,
  - e que contém todos os vértices de G, i.e., $V(T) = V$
- Note que, existe um caminho em T entre qualquer par de vértices de V.
- Além disso, entre todas as árvores geradoras de G,
  - o custo de T, i.e., $c(T) = \sum_{e \in T} c(e)$ deve ser mínimo.

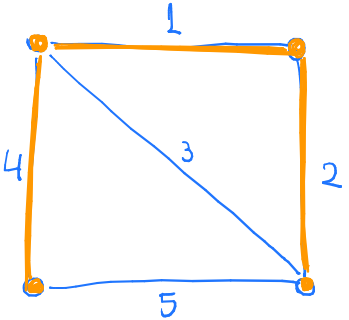
Exemplos:



Spanning Tree, mas não é mínima



Não é árvore
Não é geradora



MST

Suposições para simplificar:

- G é conexo, caso contrário não faz sentido falar em árvore,
    - mas sim em floresta geradora mínima.
  - É fácil identificar os componentes conexos
    - usando busca em largura ou em profundidade.
- Custos das arestas são distintos.
  - Algoritmos continuam corretos e eficientes se isso não é verdade,
    - mas as provas ficam mais chatas,
  - basicamente porque não conseguimos usar
    - argumentos por contradição e precisamos usar
      - argumentos iterativos que são mais enrolados.

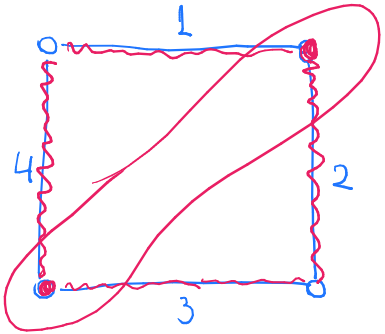
Um corte (A, B) é uma bipartição dos vértices do grafo,

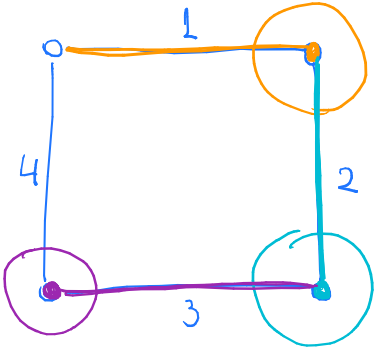
- i.e., $A \cup B = V$ e $A \cap B = \emptyset$

- Uma aresta e cruza um corte se cada extremo está em uma parte distinta,
  - i.e., $e = \{u, v\}$ cruza (A, B) se $u \in A$ e $v \in B$ ou vice-versa

⇒ **Propriedade do corte:** Dado um grafo G = (V, E), considere uma aresta $e \in E$

- Suponha que existe um corte (A, B) tal que
  - e é a aresta mais barata de G que cruza este corte.
- Então e está na árvore geradora mínima de G.

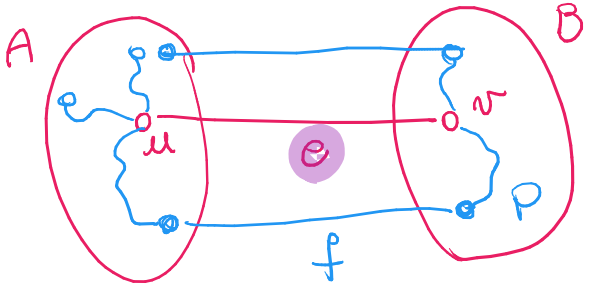




- Podemos falar DA árvore geradora mínima
  - porque supomos que não existem arestas com mesmo custo.

Demonstração da propriedade do corte

⇒ Suponha, por contradição, que a árvore geradora mínima T^* não usa
- uma aresta e que é a mais barata que atravessa um corte (A, B)



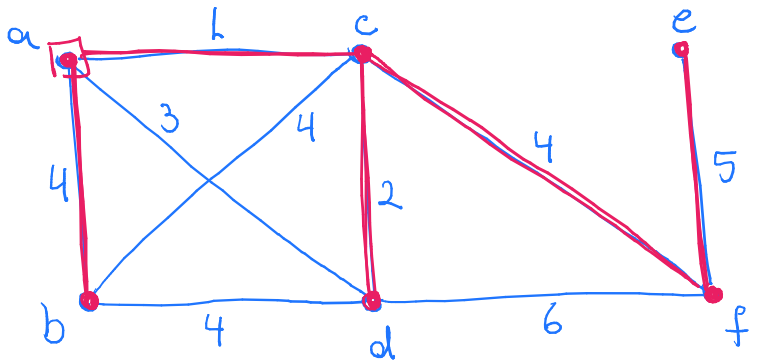
- Note que, T^* precisa atravessar esse corte,
  - já que ela conecta todos os vértices do grafo.
- Sejam u e v os extremos da aresta e, ou seja, $e = \{u, v\}$
  - Assim, existe um caminho $P \subseteq T^*$ que conecta u e v
- Como u e v estão em partes diferentes do corte,
  - pelo menos uma aresta $f \in P$ cruza o corte.
- Construa uma nova árvore T' fazendo uma troca, i.e., $T' = T^* \cup \{e\} \setminus \{f\}$
  - T' continua conexa, pois $P \cup \{e\}$ forma um ciclo.
- Como e é a aresta de menor custo do corte (A, B), temos $c(T') < c(T^*)$
  - Portanto, a nova árvore T' é mais barata que T^*, contradição.

Algoritmo de Prim

Técnica de projeto de algoritmos gulosos: iterativamente realizar
    - escolhas míopes buscando atingir o ótimo.
- A propriedade do corte nos dá um critério para escolhas míopes.

Ideia para um algoritmo: dado um grafo ponderado $G = (V, E)$
- considere um corte (A, B) e seja e a aresta mais barata que cruza este corte.
    - Então e deve ser colocado na árvore geradora em construção.
- Podemos derivar diversos algoritmos que utilizam essa propriedade/ideia.
    - O primeiro que veremos é o algoritmo de Prim.

Exemplo do algoritmo de Prim:



Pseudocódigo do algoritmo de Prim:

```
Prim (G = (V,E), custos c):
    escolher 's' arbitrariamente como inicial
    X = {s}        T = ∅
    enquanto X ≠ V:
        • seja e = {u,v} a aresta de menor custo que atravessa (X, V\X)
          c/ u ∈ X e v ∉ X
          T = T ∪ {e}
          X = X ∪ {v}
    devolva T
```

O(n) iterações

n = |V|

O(m) arestas p/ verificar

Implementação e eficiência do algoritmo de Prim:

- A implementação mais simples leva tempo $O(n \cdot m)$
  - o que não é trivial pois o número de árvores geradoras é imenso.
- Note que, assim como no algoritmo de Dijkstra,
  - estamos sucessivamente escolhendo elementos mínimos.
- Por isso, parece interessante usar um heap de mínimo na implementação.
- É curioso observar que a implementação com heap mais simples e eficiente
  - utiliza o heap para armazenar vértices, e não arestas.

Pseudocódigo do algoritmo de Prim usando heap de mínimo:

PrimHeap (G=(V,E), custos c):

```
X = ∅
T = ∅
para todo v ∈ V:
        d[v] = +∞
        aresta[v] = Null
escolha um vértice s qualquer como inicial
d[s] = 0
H = heap de mínimo com todo v ∈ V e usando d[] como prioridade
enquanto H ≠ ∅:
    v = remove mínimo de H
    X = X ∪ {v}
    T = T ∪ aresta[v]
    para cada aresta (v,w):
        se c(v,w) < d[w]:
            d[w] = c(v,w)
            aresta[w] = (v,w)
            atualize a posição de w em H
devolva T
```

O(n)

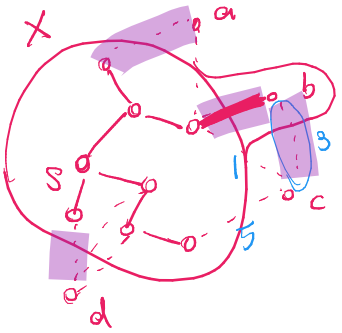
O(n)

O(n) iterações

no total O(n log n)

no total O(m) iterações

no total O(m log n)



Análise de eficiência do algoritmo de Prim implementado com Heap:

- a inicialização leva tempo $O(n)$
- o laço principal é executado $O(n)$ vezes,
  - já que em cada iteração um vértice é removido do heap.
- Cada operação de remoção do heap custa $O(\log n)$
  - Assim, essas operações custam, no total, $O(n \log n)$
- Cada aresta do grafo pode desencadear
  - uma operação de atualização no heap, i.e., $O(m)$ atualizações
- Como cada atualização custa $O(\log n)$
  - no total essas operações custam $O(m \log n)$
- Portanto, a complexidade de tempo do algoritmo é $\Rightarrow O(m \log n)$
  - que é quase linear no tamanho do grafo.

Curiosidade: existe outra maneira eficiente de implementar este algoritmo

- sem usar funções para atualizar elementos internos do heap.
  - Quiz: Como fazer isso?
- Dica: envolve reinserir vértices no heap ao encontrar arestas de menor custo
  - e, ao remover um vértice, só considerá-lo se ele ainda não foi visitado.

Prova de corretude do algoritmo de Prim:

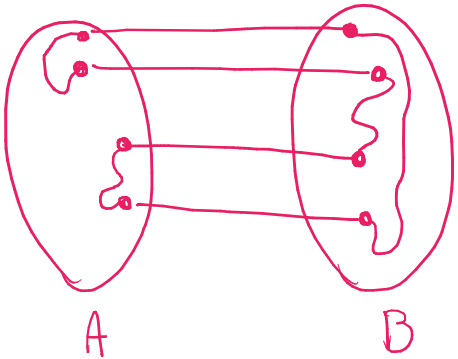
- Primeiro mostramos que ele produz uma árvore T que é geradora, ou seja
  1. T não possui ciclos
  2. T alcança todos os vértices do grafo
- Então mostramos que T é de custo mínimo, usando a propriedade do corte.

1) Começamos mostrando que T não possui ciclos.

- Para tanto basta mostrar que nenhuma aresta escolhida pelo algoritmo
  - pertence a algum ciclo.
- Existem resultados auxiliares que podem nos ajudar

Lema da Travessia Par - Se um corte (A,B) atravessa um ciclo C qualquer,

- então C tem um número par de arestas atravessando o corte.



Prova: Note que, se começarmos a percorrer o ciclo C

- cada vez que passamos por uma das arestas que atravessa o corte (A,B)
  - nós mudamos de parte, e só nesse caso mudamos de parte.
- Assim, após atravessarmos o corte C um número ímpar de vezes
  - estamos numa parte diferente da que começamos.
- Como o ciclo tem que fechar, precisamos atravessar
  - um número par dessas arestas para voltar ao começo.
- Portanto, o corte tem que atravessar um número par de arestas do ciclo C

Corolário da Aresta Solitária - Se e é a única aresta atravessando

- um certo corte (A,B) então e não pode pertencer a um ciclo.

Prova: Se e estivesse em um ciclo, pelo Lema da Travessia Par,

- ao menos mais uma aresta também teria que atravessar o corte (A,B)

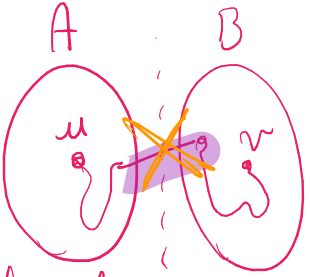
Observe que toda aresta que o algoritmo escolhe é a única aresta

- que atravessa o corte definido pelos vértices $(X, V \setminus X)$
- Assim, usando o Corolário da Aresta Solitária temos que
  - as arestas escolhidas pelo algoritmo não formam ciclos.
- De fato, também precisamos mostrar que T é conexo.
  - Mas isso é fácil de verificar por indução, já que
    - toda aresta que o algoritmo escolhe tem uma ponta em X

2) Agora vamos mostrar que T é geradora, ou seja, alcança todos os vértices de G.

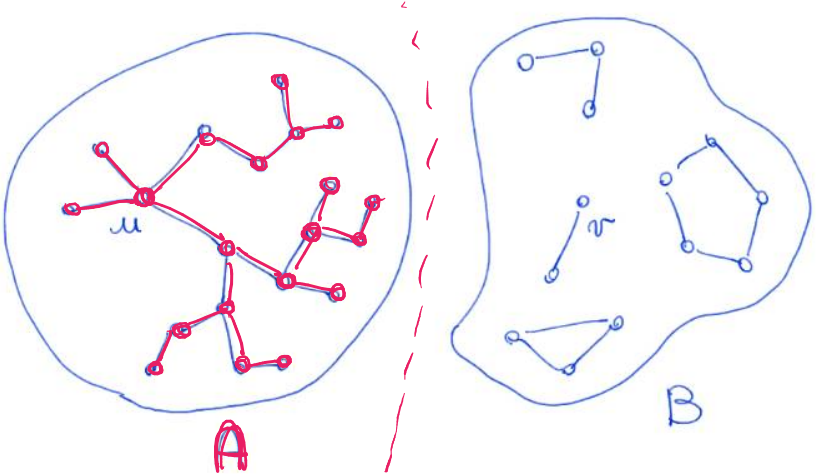
- Como em cada iteração o algoritmo busca arestas
  - que atravessam o corte $(X, V \setminus X)$
- para que ele deixe de alcançar algum vértice
  - deve ser o caso de existir algum corte vazio.
- Existe um resultado auxiliar que pode nos ajudar.

Lema do Corte Vazio - Um grafo não é conexo <--> se, e somente se,
existe um corte (A,B) que não é atravessado por arestas.
sem



Prova: (←) Supondo que existe um corte (A,B) sem arestas,
Temos $u \in A$ e $v \in B$. Basta verificar que não existe caminho de u até v, caso contrário teríamos uma aresta atravessando (A,B). Portanto, o grafo é desconexo

(→) Supondo que o grafo não é conexo, seja u e v um par não conectado.
Seja A o conj. de todos os vértices alcançados a partir de v. Seja $B = V \setminus A$. Note que $u \in B$. Assim, por construção (A,B) é um corte sem arestas cruzando sua fronteira.



Como sabemos que o grafo $G = (V, E)$ é conexo, usando o Lema do Corte Vazio

- concluímos que ele não tem qualquer corte (A, B) sem arestas.
- Portanto, o algoritmo nunca vai parar no meio de uma iteração
    - por falta de arestas atravessando o corte $(X, V \setminus X)$

3) Finalmente mostramos que T tem custo mínimo.

Esse resultado sai direto da Propriedade do Corte, pois

- toda aresta escolhida pelo algoritmo é a mais barata de um corte $(X, V \setminus X)$
    - e, pela propriedade, deve estar na árvore geradora mínima.