AED2 - Aula 15
Ordenação por partes (radixSort)

Na última aula vimos o countingSort,

- cuja ideia central é contar o número de predecessores de cada chave
  - para posicionar corretamente os elementos no vetor ordenado.
- Ele é muito eficiente para ordenar conjuntos de elementos
  - cujas chaves são inteiros pequenos.
- Por inteiros pequenos, queremos dizer valores inteiros entre 0 e R-1
  - sendo R limitado pelo número de elementos do conjunto.

Quiz1: Para perceber a limitação do countingSort, considere

- um vetor com 1 milhão de elementos cujas chaves são inteiros de 32 bits.
  - Qual a eficiência do countingSort neste caso?

Uma alternativa para ordenar conjuntos cujas chaves são grandes

- é dividi-las em pedaços menores e ordenar por etapas.
  - Essa é a ideia central dos métodos de ordenação radixSort.
- Chamamos cada um dos pedaços da chave de dígito
  - e seu tamanho deriva da base (radix) utilizada.
- Assim, os dígitos não pertencem necessariamente ao conjunto {0, …, 9}.

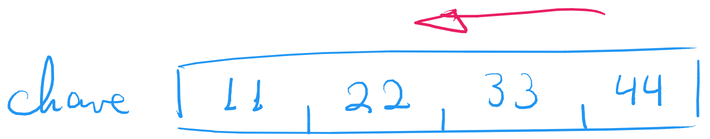
Os métodos radixSort também são chamados de ordenação digital, por ordenar

  - as chaves dígito-a-dígito, ou as strings caractere-a-caractere.
- Eles variam de acordo com a ordem em que consideramos os dígitos,
  - i.e., se vamos dos mais significativos para os menos,
    - ou dos menos para os mais significativos.

→ LSD radixSort { Least Significative Digit

Este método é interessante para ordenar um vetor $v[0..n-1]$ de chaves,

  - sendo todas do mesmo comprimento.
- Se as chaves são strings de caracteres,
  - estamos falando do problema de colocá-las em ordem lexicográfica.
- Ordenamos indo do dígito menos significativo até o mais significativo,
  - i.e., percorremos cada chave da direita para a esquerda.



- Em cada etapa ordenamos todo o conjunto, considerando apenas um dígito
  - e usando um método de ordenação estável.
    - Quiz2: Por que ser estável é essencial?
- De preferência, usamos o countingSort,
  - por ser estável e muito rápido com chaves pequenas (dígitos).

Primeiro veremos uma versão do LSD radixSort

- que trabalha com vetores de caracteres (strings) de mesmo tamanho,
    - sendo cada string uma chave.

Exemplo:

Original	**3° Dígito**	**2° Dígito**	**1° Dígito**
1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3
KNG	KDA	KDA	FFU
FFU	RFD	KDV	KDA
KDV	KNG	RFD	KDV
RFD	FFU	FFU	KNG
KDA	KDV	KNG	RFD

Observe que na última coluna todas as chaves estão ordenadas.

- Para entender o motivo, considere a penúltima coluna e observe que
    - se remover dela todos os elementos que não começam com K
        - os elementos restantes já estão em ordem.
- De fato, no início da i-ésima etapa deste método
    - todas as chaves estão ordenadas
        - com relação apenas aos dígitos já considerados,
            - i.e., com índices maiores que i
- Como a ordenação utilizada em cada etapa é estável,
    - esta propriedade invariante se mantém
        - e propaga para mais um dígito a cada nova etapa.

No algoritmo a seguir,

- W é o comprimento, em dígitos, de cada chave (string),
- R é o universo de valores que cada dígito pode assumir.
    - Note que, $R \leq 256$ já que cada dígito corresponde a um byte.

1 byte = 8 bits

$2^8 = 256$ possibilidades

Códigos:

```
typedef unsigned char byte;

// Rearranja em ordem lexicográfica um vetor v[0 .. n - 1]
// de strings. Cada v[i] é uma string v[i][0 .. W - 1]
// cujos elementos pertencem ao conjunto 0 .. R - 1.
void ordenacaoDigital(byte *v[], int n, int W) {
    int *ocorr_pred, digito, valor, i, R = 256;
    byte **aux;
    ocorr_pred = malloc((R + 1) * sizeof(int));
    aux = malloc(n * sizeof(byte *));
```

```
    for (digito = W - 1; digito >= 0; digito--) {
        for (valor = 0; valor <= R; valor++) ocorr_pred[valor] = 0;
        for (i = 0; i < n; i++) {
            valor = v[i][digito];
            ocorr_pred[valor + 1] += 1;
        } // ocorr_pred[valor] é o # de ocorrências de valor - 1
        for (valor = 1; valor <= R; valor++)
            ocorr_pred[valor] += ocorr_pred[valor - 1];
        // ocorr_pred[valor] é o # de ocor. dos pred. de valor
        for (i = 0; i < n; i++) {
            valor = v[i][digito];
            aux[ocorr_pred[valor]] = v[i];
            ocorr_pred[valor]++; // atualiza número de predecessores
        }
        // aux[0..n-1] está em ordem crescente considerando
        // apenas os digitos entre digito e W - 1
        for (i = 0; i < n; i++) v[i] = aux[i];
    }
    free(ocorr_pred); free(aux);
}
```

$O(R)$

$O(n)$

$O(R)$ detalhes na aula de countingSort

basicamente o countingSort

$O(n)$

$O(n)$

Invariante e corretude: No início de cada iteração do laço externo

- as strings estão ordenadas com relação
  - aos subvetores $v[i][digito+1..W-1]$, p/ $i = 0, \ldots, n-1$

Eficiência de tempo: Uma observação importante para analisar o método radixSort

  - é que nenhum dígito é verificado mais de uma vez.

- Assim, radixSort é linear no número total de dígitos, i.e.,
  - $O((n+R)W)$ sendo n o número de chaves,
    - R o número de valores que cada dígito pode assumir, e
    - W o número de dígitos em cada chave.
- Este método é melhor que ordenações $O(n \lg n)$ quando $R = O(n)$ e
  - $W = o(\lg n)$, sendo $o(\lg n)$ assintoticamente menor que $\lg n$

Quiz3: Considere ordenar 1 milhão de elementos com chaves de 5 dígitos. = caracteres

- Compare lg do número de elementos com o número de dígitos das chaves $R = 256$
  - para decidir se o LSD radix é preferível ao quickSort, por exemplo.

Eficiência de espaço: Memória adicional da ordem de $(n+R)$, i.e., $O(n+R)$

- por conta dos vetores auxiliares do countingSort.

Estabilidade: É estável, pois como o método que ordena cada dígito é estável,

- em nenhuma etapa elementos com a mesma chave serão invertidos,
  - já que eles coincidem em todos os dígitos.

Agora veremos uma versão semelhante do LSD radixSort

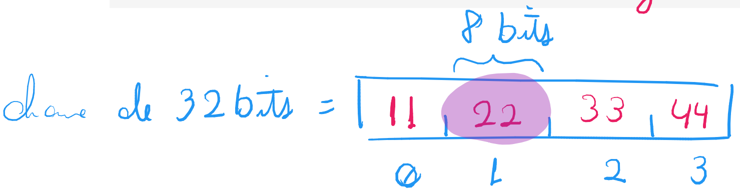
- que trabalha com vetores de inteiros, sendo cada inteiro uma chave.
- Esta versão manipula os bits das chaves para obter cada dígito.

Códigos:

```
const int bitsPalavra = 32;
const int bitsDigito = 8;
const int digitosPalavra = bitsPalavra / bitsDigito;
const int Base = 1 << bitsDigito; // Base = 2^bitsDigito

int pegaDigito(int chave, int digito) {
    return (int)((chave >>
      (bitsDigito * (digitosPalavra - 1 - digito))) & (Base - 1));
}
```

de dígitos à direita do dígito desejado



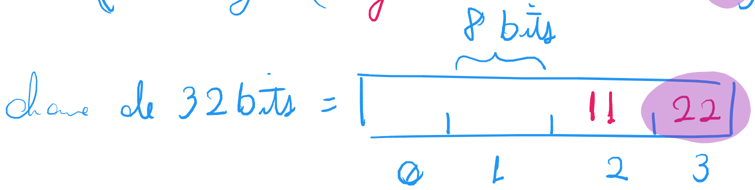
digitosPalavra = 32/8 = 4

digito = d = 1

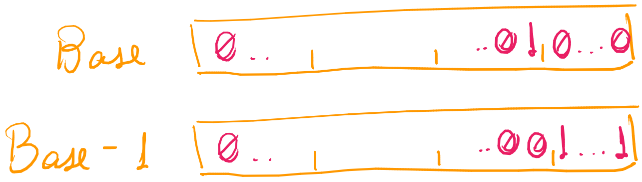
(digitosPalavra - 1 - d) = 4 - 1 - 1 = 2

(bitsDigito(digitosPalavra - 1 - d)) = 8 . 2 = 16

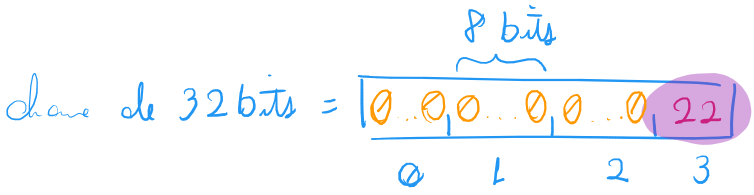
(chave >> (bitsDigito(digitosPalavra - 1 - d))) = chave >> 16



Base = 1 << bitsDigito = 1 << 8



(chave >> (bitsDigito(digitosPalavra - 1 - d))) & (Base - 1)



```
int pegaDigito2(int chave, int digito) {
    return (int)(chave / 
     exp2(bitsDigito * (digitosPalavra - 1 - digito))) % Base;
}
```

→ divisão inteira

→ resto da divisão inteira

de dígitos à direita do dígito desejado

```
void LSDradixSort(int v[], int n) {
    int digito, valor, i;
    int *ocorr_pred, *aux;
    ocorr_pred = malloc((Base + 1) * sizeof(int));
    aux = malloc(n * sizeof(int));

    for (digito = digitosPalavra - 1; digito >= 0; digito--) {
        for (valor = 0; valor <= Base; valor++)
            ocorr_pred[valor] = 0;
        for (i = 0; i < n; i++) {
            valor = pegaDigito(v[i], digito);
            ocorr_pred[valor + 1] += 1;
        }
        // agora ocorr_pred[valor] é o # de ocorrências de valor - 1
        for (valor = 1; valor <= Base; valor++)
            ocorr_pred[valor] += ocorr_pred[valor - 1];
        // agora ocorr_pred[valor] é o número de
        // ocorrências dos predecessores de valor.
        // Logo, a sequência de elementos iguais a valor
        // deve começar no índice ocorr_pred[valor].
        for (i = 0; i < n; ++i) {
            // note a diferença entre o valor analisado e copiado
            valor = pegaDigito(v[i], digito);
            aux[ocorr_pred[valor]] = v[i];
            ocorr_pred[valor]++; // atualiza o # de predecessores
        }
        // aux[0..n-1] está em ordem crescente considerando
        // apenas os digitos entre digito .. digitosPalavra - 1
        for (i = 0; i < n; i++)
            v[i] = aux[i];
    }
    free(ocorr_pred);
    free(aux);
}
```

= O(Base)

= O(Base)

Eficiência de tempo:

- Uma observação importante para analisar os método radixSort é que
    - cada dígito é verificado um número constante de vezes.
- Assim, radixSort é linear no número de dígitos, i.e.,
    - $O((n+Base) \cdot digitosPalavra)$, sendo n o número de chaves;
    - $Base$ o número de valores que cada dígito pode assumir;
        - Note que, sendo bitsDigito o número de bits de cada dígito,
            - Base = $2^{bitsDigito}$
    - $digitosPalavra$ o número de dígitos em cada chave.
        - Note que, sendo bitsPalavra o número de bits por chave,
            - digitosPalavra = $bitsPalavra / bitsDigito$

Se os dígitos forem pequenos e as chaves grandes

- a complexidade de tempo pode superar $n \lg n$ assintoticamente.
- Já se os dígitos forem grandes em relação às chaves
    - a eficiência tende a $O(n)$
- Por exemplo, tome n = 1 bilhão $= 10^9$
    - Se bitsDigito = 1 (Base = $2^1 = 2$) e bitsPalavra = 64
        - temos digitosPalavra = $64/1 = 64$
            - que é maior que $\lg 10^9 \approx \lg 2^{10.3} \approx 30$
    - Se bitsDigito = 16 (Base = $2^{16} = 65536$) e bitsPalavra = 32
        - temos digitosPalavra = $32/16 = 2$
            - que é muito menor que $\lg 10^9 \approx 30$

Quiz4: Para perceber a vantagem do radixSort, considere um vetor

- com 1 milhão de elementos cujas chaves são inteiros de 32 bits.
    - Qual a eficiência do radixSort com dígito de 8 bits?

Eficiência de espaço: Memória adicional da ordem de $(n + Base)$

- i.e, $O(n + Base)$
- por conta dos vetores auxiliares do countingSort.

Observação: Notem que, quando o tamanho dos dígitos cresce,

- a Base cresce exponencialmente,
- o que significa maior consumo de tempo e de espaço.

Estabilidade: É estável, pois como o método que ordena cada dígito é estável,

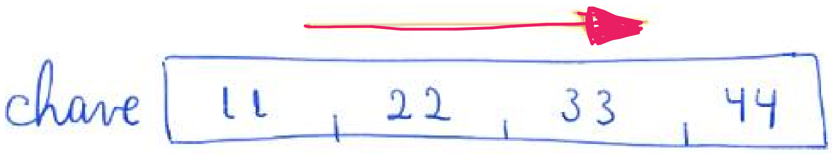
- em nenhuma etapa elementos com a mesma chave serão invertidos,
    - já que eles coincidem em todos os dígitos.

MSD radixSort

Most Significative Digit

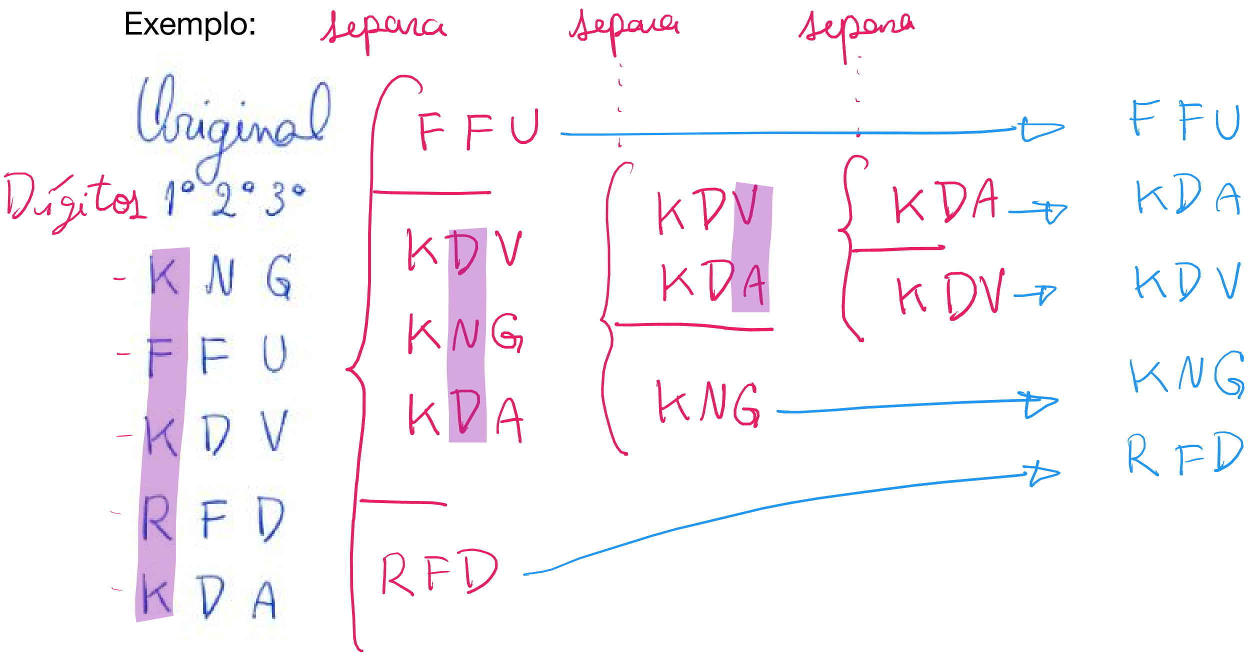
Neste método vamos ordenar o conjunto

- indo do dígito mais significativo até o menos significativo,
  - i.e., percorremos cada chave da esquerda para a direita.



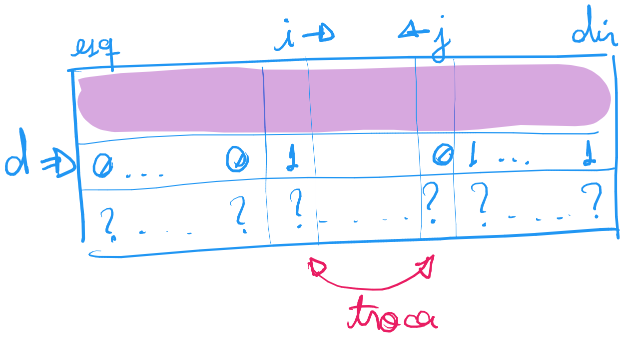
- Em cada etapa podemos usar uma variante do algoritmo da separação,
  - que estudamos junto do quickSort.
- Esta variante só considera o dígito corrente
  - e divide o conjunto em Base subconjuntos,
    - sendo Base o número de possibilidades de valor de um dígito.
- Este método pode lidar com chaves de comprimentos variados,
  - e nem sempre precisa avaliar todos os dígitos de todas as chaves,
    - o que pode melhorar sua eficiência.

Exemplo:



Vamos focar em um caso particular, e mais simples, do MSD radixSort em que

- o dígito tem tamanho 1 , e Base = $2^1 = 2$, chamado de binary quickSort.
- Segue um exemplo de separação que coloca elementos com
  - dígito 0 à esquerda e dígito 1 à direita.



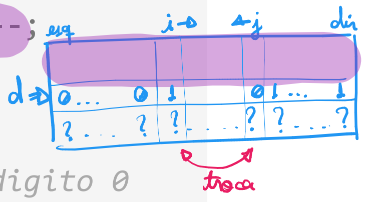
A seguir temos uma implementação do binary quickSort.

Códigos:

```
const int bitsPalavra = 32;
const int bitsDigito = 1;  -> o código a seguir só funciona c/ esse valor
const int digitosPalavra = bitsPalavra / bitsDigito;
const int Base = 1 << bitsDigito; // Base = 2^bitsDigito

// esq indica a 1a posição, dir a ultima, digito é o digito corrente
void quickSortBin(int v[], int esq, int dir, int digito) {
    int i = esq, j = dir;
    // caso base quando subvetor é pequeno ou acabaram os dígitos
Caso base -> if (dir <= esq || digito > digitosPalavra) return;
    // separa as chaves do subvetor de acordo com o dígito corrente
    while (j > i) {
alg. de     while (pegaDigito(v[i], digito) == 0 && i < j) i++;
separação   while (pegaDigito(v[j], digito) == 1 && j > i) j--;
        troca(&v[i], &v[j]);
    }
    // ajusta j para que v[esq .. j-1] tenha chaves com digito 0
    if (pegaDigito(v[~~dir~~ j], digito) == 0) j++; <-
1º s.p — quickSortBin(v, esq, j - 1, digito + 1);
2º s.p — quickSortBin(v, j, dir, digito + 1);
}

void MSDradixSort(int v[], int n) {quickSortBin(v, 0, n - 1, 0);}
```



Eficiência de tempo: Uma observação importante para analisar os método radixSort

- ○ é que nenhum dígito é verificado mais que um # constante de vezes.

- Assim, no pior caso radixSort é linear no número de dígitos, i.e.,
  - ○ $O(n \cdot digitosPalavra) = O(n \cdot bitsPalavra)$ no caso do binary quickSort.

Eficiência de espaço: Memória adicional da ordem de $digitosPalavra = bitsPalavra$

- por conta da profundidade máxima da pilha de recursão.

Estabilidade: Não é estável, por conta das trocas da separação.

Quiz5: Note que, essa implementação trata chaves com comprimentos variados,

- ○ desde que não existam chaves repetidas. Por que?

- Dica: analise as condições do caso base.

Quiz6: Como seria uma versão deste algoritmo com bitsDigito > 1?

- Dica: solução para separação inspirada
  - ○ na contagem de predecessores do countingSort.
- Por conta disso, um termo R = Base surge na eficiência do algoritmo.