AED2 - Aula 12
Problemas da seleção e da contagem de inversões

Uma das ideias centrais em algoritmos é que

- abordagens usadas para resolver um problema
    - podem ser aplicadas/adaptadas para problemas diferentes.

Nesta aula veremos como usar o que aprendemos

- ao estudar algoritmos eficientes para o problema da ordenação
    - para projetar algoritmos para dois problemas relacionados.

Problema da seleção

Definições:

- A ordem de um elemento é uma medida da grandeza dele
    - em relação aos seus pares.
- Assim, se a ordem de um elemento é $K \in \mathbb{Z}^+$
    - então existem K elementos de valor menor que o dele.
- No problema da seleção, dado um vetor v de tamanho n
    - e um inteiro $k \in [0, n)$, queremos o valor do elemento de ordem K

Exemplos:

- v = 3 2 5 4 1 e k = 3. Elemento de ordem 3 é 4
- v = 1 2 3 4 5 e k = 3. Elemento de ordem 3 é 4
- v = 5 4 3 2 1 e k = 3. Elemento de ordem 3 é 4
- v = 50 4 30 20 10 e k = 0. Resp.: 4

A resposta não muda nas diferentes permutações,

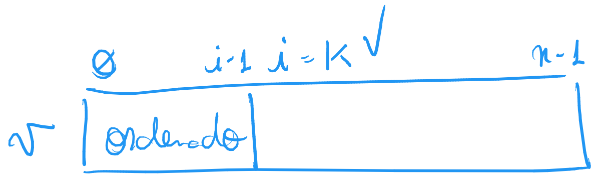
- pois a ordem de um elemento depende da comparação
    - de seu valor com os demais elementos,
- e não de sua posição no vetor.

Curiosidades:

- Na permutação ordenada do vetor $v[0 .. n-1]$
    - o elemento de ordem K ocupa a K-ésima posição.
- Note que, podemos definir ordem começando em 0 ou em 1
    - Escolhi usar começar em 0, para combinar com nossos vetores.
- Assim, se v estiver for ordenado
    - o elemento de ordem K ocupa a posição $v[K]$
- Perceba que o problema do mínimo e do máximo
    - são casos particulares do problema da seleção.
        - Mínimo corresponde ao elemento de ordem 0
        - Máximo corresponde ao elemento de ordem $n-1$
- O problema da seleção é trivial se v estiver ordenado,
    - ou se ordenarmos ele.
        - Qual seria a eficiência dessa abordagem? $O(n \lg n)$
- Será que conseguimos resolver o problema sem usar esta abordagem?

Em AED1, vimos um algoritmo baseado na ideia do selectionSort,

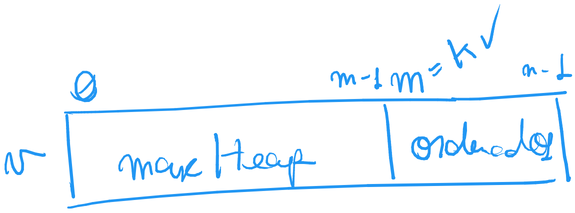
- com eficiência $O(nk)$



iterar k vezes no laço do selection Sort

Também vimos um algoritmo baseado na ideia do heapSort,

- com eficiência $O((n-k)\lg n + n)$



$m = n$ começo

$m = k$ parada

iterar por $(n-k)$ vezes

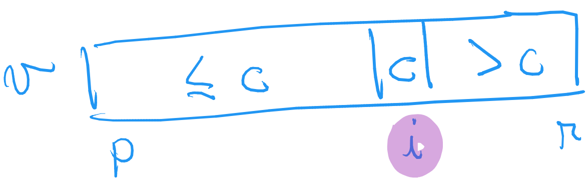
Vamos tentar obter um algoritmo mais eficiente para este problema,

- nos inspirando no quickSort ou, mais especificamente,
  - no algoritmo para o problema da separação.

Relembrando, no problema da separação temos vetor v com limites p e q

- i.e., os elementos estão no subvetor $v[p..q]$
- e recebemos um pivô c que pertence a $v[p..q]$

- O objetivo é separar os elementos do vetor de modo que
  - o prefixo deste tenha os elementos $\leq c$
  - e o sufixo tenha os elementos $> c$

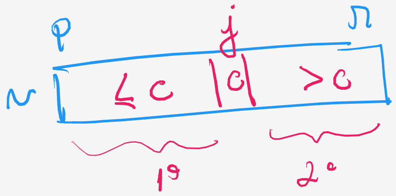


- Isto é, c deve terminar na posição i tal que
  $v[p..i-1] \leq c = v[i] < v[i+1..r]$
- Note que, c termina na posição que ele deve ocupar no vetor ordenado,
  - ou seja, a ordem de c é i
- Além disso, todo elemento com ordem menor que i está em $v[p..i-1]$
  - e todo elemento com ordem maior que i está em $v[i+1..r]$

Por isso, podemos projetar um algoritmo para o problema da seleção,

- que começa separando o vetor ao redor de um pivô,
    - e então decide em qual subvetor continuar a busca pelo k-ésimo.

```
// baseado no quickSort determinístico
// p indica a primeira posicao e r a ultima
int selecao3(int v[], int p, int r, int k) {
    int j;
    j = separa(v, p, r);
    if (k == j)                          — achou
        return v[j];
    if (k < j)
        return selecao3(v, p, j - 1, k);    — busca no 1° subv.
    // if (k > j)
    return selecao3(v, j + 1, r, k);     — busca no 2° subv.
}
```

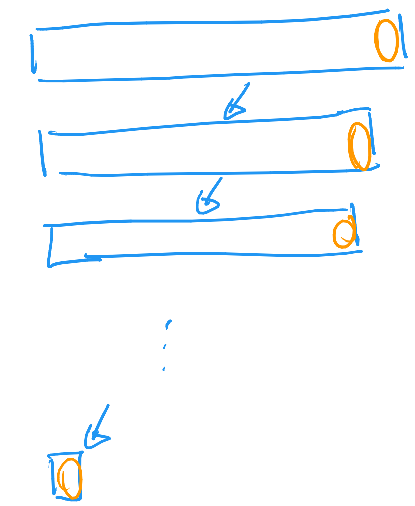


Note que, não é necessário ajustar a ordem do elemento buscado

- mesmo quando ele está no segundo subvetor, pois
    - a rotina separa considera a posição do elemento no vetor original.

Eficiência de tempo: $O(n^2)$ no pior caso.

pivôs 0   chamadas recursivas



nível	#sub.prob.	tam.sub.prob.
0	1	n
1	1	$n-1$
2	1	$n-2$
⋮	⋮	⋮
h	1	$1 = n-h$

$\Downarrow$

$h = n-1$

- Note que, o trabalho por nível é proporcional
    - ao tamanho do subproblema.
- Por isso, o trabalho total é proporcional a

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n+1).n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Eficiência de espaço: $O(n)$ espaço adicional,

- por conta da altura da pilha de recursão.

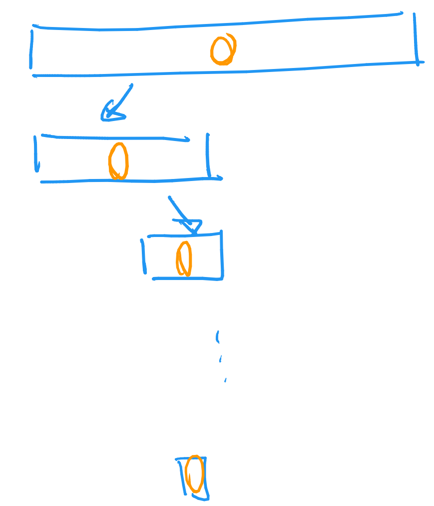
Para evitar esse pior caso, precisamos de bons pivôs.

- Assim como no caso do quickSort,
  - usamos aleatoriedade para conseguir bons pivôs, em média.

```c
// baseado no quickSort aleatorizado
// p indica a primeira posicao e r a ultima
int selecao4(int v[], int p, int r, int k) {
    int desl, j;
    desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r - p
+ 1));
    troca(&v[p + desl], &v[r]);
    j = separa(v, p, r);  — O(n-p)
    if (k == j)
        return v[j];  — achou
    if (k < j)
        return selecao4(v, p, j - 1, k);  — 1°
    // if (k > j)
    return selecao4(v, j + 1, r, k);  — 2°
}
```

Eficiência de tempo esperado: $O(n)$

pivôs O chamadas recursivas



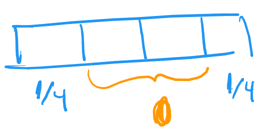
nível	# sub. prob.	tam. sub. prob.
0	1	$n = n/2^0$
1	1	$n/2 = n/2^1$
2	1	$n/4 = n/2^2$
⋮	⋮	⋮
$h = \lg n$	1	$n/2^h = 1$

$\Downarrow$

$2^h = n \Rightarrow h = \lg n$

- Note que, o trabalho por nível é proporcional
  - ao tamanho do subproblema.
- Por isso, o trabalho total é proporcional a

  $n + n/2 + n/4 + \dots \leq 2n$
- Claro que nem todo pivô dividirá o vetor exatamente ao meio,
  - mas, em média, a cada dois pivôs, um será bom,
    - mantendo o resultado a menos de uma constante.



Eficiência de espaço esperado: $O(\lg n)$ espaço adicional,

- por conta da altura da pilha de recursão.

Observe que, o algoritmo recursivo anterior apresenta recursão caudal,

- o que nos permite transformá-lo em um algoritmo iterativo.

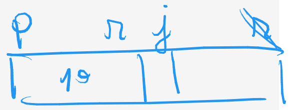
```
int selecao5(int v[], int p, int r, int k) {
    while (1) {
        int desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) *
(double)(r - p + 1));
        troca(&v[p + desl], &v[r]);
        int j = separa(v, p, r);
        if (k == j) return v[j];
        if (k < j) r = j - 1;
        else /* (k > j) */ p = j + 1;
    }
}
```

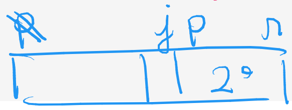
laço

→ encontrou

busca 1° subvetor

busca 2° subvetor





- Eficiência de tempo esperado: $O(r-p) = O(tam)$
- Eficiência de espaço: $O(1)$ espaço adicional,
    - já que o número de variáveis auxiliares independe da entrada.

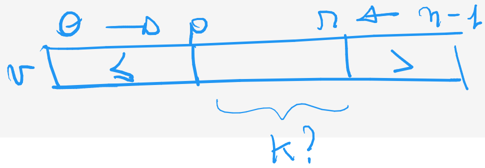
Podemos refinar esta versão iterativa,

- colocando a condição de parada no do {..} while(...)
    - e removendo os limites do vetor dos parâmetros.

```
int selecao6(int v[], int n, int k) {
    int p = 0;
    int r = n - 1;
    do {
        int desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) *
(double)(r - p + 1));
        troca(&v[p + desl], &v[r]);
        int j = separa(v, p, r);
        if (k < j) r = j - 1;
        else /* if (k > j) */ p = j + 1;
    } while (k != j);
    return v[j];
}
```

1°

2°



- Invariantes e corretude:

  o $v[0..p-1] \leq v[p..r] < v[r+1..n-1]$
    - Depois do separa( ), $v[j]$ corresponde ao j-ésimo menor elemento.
- Eficiência de tempo esperado: $O(n)$
- Eficiência de espaço: $O(1)$ espaço adicional,
    - já que o número de variáveis auxiliares independe da entrada.

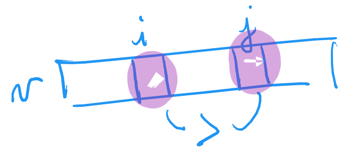
Quiz1: Todas as nossas adaptações de algoritmos para seleção são de algoritmos

- que colocam alguns elementos em suas posições definitivas,
    - muito antes do vetor todo estar ordenado. Será coincidência?

Problema da Contagem de Inversões

Definição:

- Uma inversão é um par de elementos $v[i]$ e $v[j]$ tal que $i < j$ e $v[i] > v[j]$
- Dado um vetor v de tamanho n, quantas inversões existem em v?



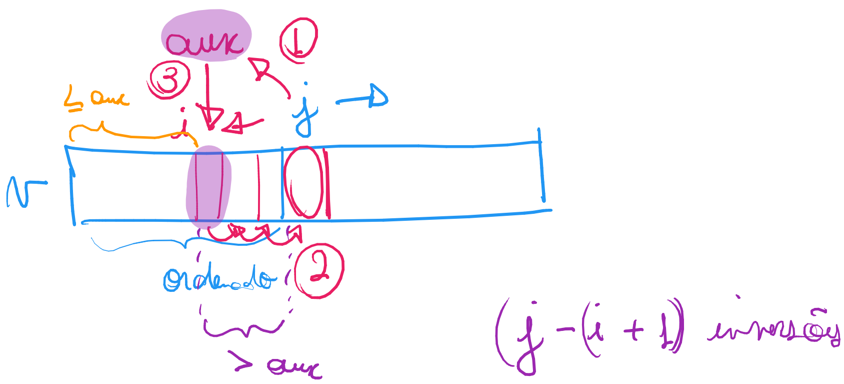
Exemplos:

- v = 3 2 5 4 1
  - 3 está invertido com 2 e 1
  - 2 está invertido com 1
  - 5 está invertido com 4 e 1
  - 4 está invertido com 1
  - Total de inversões = $2 + 1 + 2 + 1 = 6$
- v = 1 2 3 4 5
  - Total de inversões = $\emptyset$
- v = 5 4 3 2 1
  - 5 está invertido com 4, 3, 2 e 1
  - 4 está invertido com 3, 2 e 1
  - 3 está invertido com 2 e 1
  - 2 está invertido com 1
  - Total de inversões = $4 + 3 + 2 + 1 = 10$

Curiosidades: Número mínimo de inversões = $\emptyset$
  - que ocorre quando o vetor está em ordem crescente.
- Número máximo de inversões = $\binom{n}{2} = C_2^n = \frac{n.(n-1)}{2}$
  - O valor $\binom{n}{2} = C_2^n$ corresponde a todo par ser uma inversão,
    - e ocorre quando o vetor está em ordem decrescente.
- Assim, podemos pensar no número de inversões
  - como uma medida da desordem dos elementos de um vetor.

Em AED1, vimos um algoritmo baseado na ideia do insertionSort,

- com eficiência $O(n^2)$ no pior caso.



- Também vimos um algoritmo baseado na ideia do bubbleSort,
  - que conta +1 cada vez que desfaz uma inversão.

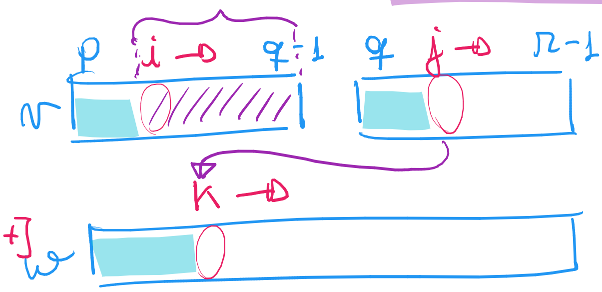
Vamos tentar obter um algoritmo mais eficiente para este problema,

- nos inspirando no mergeSort e, em particular, na rotina de intercalação.

se (v[i] > v[j])

então w[k++] = v[j++]

num_inv += q - i




```c
// primeiro subvetor entre p e q-1, segundo subvetor entre q e r-1
unsigned long long intercalaContando(int v[], int p, int q, int r) {
    int i, j, k, tam;
    unsigned long long num_inv = 0;
    i = p;
    j = q;
    k = 0;
    tam = r - p;
    int *w = malloc(tam * sizeof(int));
    while (i < q && j < r) {
        if (v[i] <= v[j])
            w[k++] = v[i++];
        else { // v[i] > v[j]
            w[k++] = v[j++];
            num_inv += q - i;
        }
    }
    while (i < q) w[k++] = v[i++];
    while (j < r) w[k++] = v[j++];
    for (k = 0; k < tam; k++)
        v[p + k] = w[k];
    free(w);
    return num_inv;
}
```

Invariante e corretude:

- w[0..k-1] ordenado e possui os elementos de v[p..i-1] e v[q..j-1]
- num_inv = número de inversões envolvendo
    - elementos de v[q..j-1] e elementos de v[p..q-1]

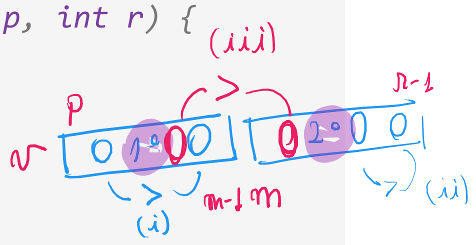
Eficiência de tempo: $O(r-p) = O(tam)$

Eficiência de espaço: $O(r-p)$ espaço adicional, por conta do vetor auxiliar.

Usando essa variante da rotina de intercalação

- que devolve o número de inversões que ela desfez ao intercalar,
    - podemos projetar uma variante do mergeSort,
        - que conta o número de inversões enquanto ordena o vetor.

```c
// baseado no mergeSort
// p indica a primeira posicao e r-1 a ultima
unsigned long long contarInversoesR(int v[], int p, int r) {
    int m;
    unsigned long long num_inv = 0;
    if (r - p > 1) {
        m = (p + r) / 2; // m = p + (r - p) / 2;
        num_inv += contarInversoesR(v, p, m);
        num_inv += contarInversoesR(v, m, r);
        num_inv += intercalaContando(v, p, m, r);
    }
    return num_inv;
}
```



ordena e conta 1º subvetor (i)

ordena e conta 2º subvetor (ii)

intercala e conta inversões divididas (iii)

- Eficiência de tempo: $O((r-p) \lg (r-p))$
- Eficiência de espaço: $O(r-p)$ espaço adicional.

Quiz2: Por que, ao analisar o espaço adicional necessário,

- não estou preocupado com o tamanho da pilha de recursão?

```c
unsigned long long contarInversoes3(int v[], int n) {
    return contarInversoesR(v, 0, n);
}
```

- Eficiência de tempo: $O(n \lg n)$
- Eficiência de espaço: $O(n)$ espaço adicional.

Quiz3: Todas as nossas adaptações de algoritmos para contagem de inversões

- são de algoritmos de ordenação estável. Será coincidência?