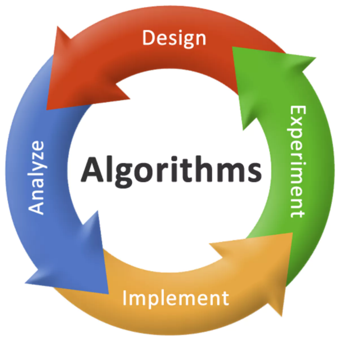
AED2 - Aula 09

Projeto e análise de algoritmos, segmento de soma máxima



"Podemos fazer melhor?"
- mote do projetista de algoritmos

Compreensão do problema de encontrar o segmento de soma máxima,

- projeto de algoritmos para esse problema,
    - com verificação da corretude e análise da eficiência dos mesmos.

Problema do segmento de soma máxima:

- Dado um vetor $v[0..n-1]$ um segmento de v é
    - qualquer subvetor da forma $v[e..d]$ com $0 \le e \le d < n$
        - Se $e > d$ então o segmento é vazio.
- Considerando que os elementos de v são inteiros,
    - a soma de um segmento é a soma dos seus elementos.
- Assim, desejamos encontrar um segmento de soma máxima
    - i.e., um segmento cuja soma dos elementos seja >=
        - que a soma dos elementos de qualquer outro segmento de v.

Exemplo:

$v[4..7] = 35$

	0				4			7
v	-16	20	-10	12	27	-6	-4	8

$v[3..4] = 39$

	0			3	4			7
v	-16	20	-10	12	27	-6	-4	8

$v[1..4] = 49$

	0	1			4			7
v	-16	20	-10	12	27	-6	-4	8

Quiz: notem que o problema só é interessante na presença de valores negativos.

- Por que?

Observem que, um segmento é determinado pelos seus extremos (e, d)

- Portanto, dado um vetor de tamanho n, existem
    - $\binom{n}{2} = C_2^n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ segmentos diferentes.

Além disso, podemos calcular o valor de um segmento

- em tempo linear no tamanho do segmento,
    - i.e., proporcional a $(d - e)$
- usando a seguinte rotina

```
// soma os valores em v[e .. d] e devolve em *psoma
void somaSeg(int v[], int e, int d, int *psoma) {
    int i;
    *psoma = 0;
    for (i = e; i <= d; i++)
        *psoma += v[i];
}
```

$O(d-e)$

Corretude de algoritmos iterativos:

1. Enunciar relações invariantes que valem ao longo das iterações
    - $*psoma$ é a soma dos elementos em $v[e..i-1]$
2. Mostrar que as relações valem no início da primeira iteração
    - No início $*psoma = 0$ e $v[e..i-1] = v[e..e-1]$ é vazio.
        - Portanto, o resultado vale trivialmente. ✓
3. Mostrar que, se as relações valem no início de uma iteração qualquer,
        - então elas continuam valendo no início da próxima iteração.
    - No início da i-ésima iteração $*psoma = v[e] + v[e+1] + \ldots + v[i-1]$
    - Depois da instrução $*psoma \mathrel{+}= v[i]$ temos
      $*psoma = v[e] + \ldots + v[i]$
    - Ao final da iteração, ocorre $i{+}{+}$
    - Portanto, no início da próxima iteração $*psoma = v[e] + \ldots + v[i-1]$

4. Verificar que, quando os laços terminam,
        - os invariantes implicam a corretude do algoritmo.
    - Quando o laço termina temos $i = d+1$
    - Pelo invariante, $*psoma = v[e] + v[e+1] + \ldots + v[d+\cancel{1}-\cancel{1}]$
        - Portanto, o algoritmo devolve a soma do segmento

Eficiência de tempo:

- Número de operações é proporcional a $d - e$ i.e., $O(d-e)$

Eficiência de espaço:

- Quantidade de memória auxiliar utilizada é constante em relação à entrada,
    - i.e., $O(1)$

Combinando as ideias expostas anteriormente, podemos

- verificar a soma de cada um dos $\binom{n}{2} = C^n_2$ segmentos e pegar o maior.
- Esta ideia é implementada no nosso primeiro algoritmo

```
// encontra o segmento de soma máxima em v[0 .. n - 1] e
// devolve seus limites em *pe, *pd e valor em *psMax
void segMax3(int v[], int n, int *pe, int *pd, int *psMax) {
    int i, j, k, sAux;
    *psMax = 0;
    *pe = *pd = -1;
    for (i = 0; i < n; i++) // i é o início do segmento corrente
        for (j = i; j < n; j++) { // j é o final de tal segmento
            sAux = 0;
            for (k = i; k <= j; k++)
                sAux += v[k];
            if (sAux > *psMax) {
                *psMax = sAux;
                *pe = i;
                *pd = j;
            }
        }
}
```

$\forall (i,j)$

somando

separa o maior

Invariantes e corretude: Observe que, na i-ésima iteração do laço externo

- calculamos a soma de todos os segmentos que começam em i.

- De modo semelhante, na j-ésima iteração do segundo laço
  - calculamos a soma dos segmentos que terminam em j.
- O laço mais interno é responsável por somar os valores em $v[i..j]$
- Os principais invariantes do laço externo são
  - $v[*pe..*pd]$ é um segmento de soma máxima de v com $*pe < i$
  - $*pSoma = v[*pe] + \dots + v[*pd]$

é

Eficiência de tempo: número de operações no pior caso da ordem de n^3

- i.e., $O(n^3)$ por conta dos três laços aninhados,
  - cada um podendo ter tamanho da ordem de n.

Eficiência de espaço: memória auxiliar é constante em relação à entrada, i.e., $O(1)$

Curiosidade: Podemos trocar as linhas

```
            sAux = 0;
            for (k = i; k <= j; k++)
                sAux += v[k];
```

- pela seguinte chamada da função somaSeg.

```
            somaSeg(v, i, j, &sAux);
```

- O algoritmo continua correto? Isso afeta a eficiência do algoritmo?

Observando o problema, podemos perceber que

- a soma de um segmento v[e..d] corresponde
  - à soma do seguimento v[e..d-1] com v[d]
- Analisando segMax3 atentos à essa observação, percebemos que
  - ele recalcula muitas vezes a soma dos mesmos segmentos.
- Eliminando esses re-cálculos temos nosso segundo algoritmo.

```c
// encontra o segmento de soma máxima em v[0 .. n - 1] e
// devolve seus limites em *pe, *pd e valor em *psMax
void segMax2(int v[], int n, int *pe, int *pd, int *psMax) {
    int i, j, sAux;
    *psMax = 0;
    *pe = *pd = -1;
    for (i = 0; i < n; i++) { // i é o início do segmento corrente
        sAux = 0;
        for (j = i; j < n; j++) { // j é o final de tal segmento
            sAux += v[j];
            if (sAux > *psMax) {
                *psMax = sAux;
                *pe = i;
                *pd = j;
            }
        }
    }
}
```

sAux é a soma v[i]+ ... v[j-1]

atualiza o máximo

Invariantes e corretude: Observe que, na i-ésima iteração do laço externo

- calculamos a soma de todos os segmentos que começam em i.

- De modo semelhante, na j-ésima iteração do laço interno
  - calculamos a soma dos segmentos que terminam em j.
- Os principais invariantes do laço externo são
  - v[*pe..*pd] é um segmento de soma máxima de v com *pe < i
  - *sMax = v[*pe] + ... + v[*pd]
- O principal invariante do laço interno, que vale no início de cada iteração, é
  - sAux = v[i] + v[i+1] + ... + v[j-1]

Eficiência de tempo: Número de operações no pior caso da ordem de n^2

- i.e., $O(n^2)$ por conta dos dois laços aninhados,
  - cada um podendo ter tamanho da ordem de n.

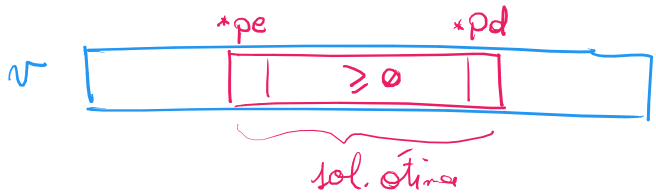
Eficiência de espaço:

- Memória auxiliar utilizada é constante em relação à entrada, i.e., $O(1)$

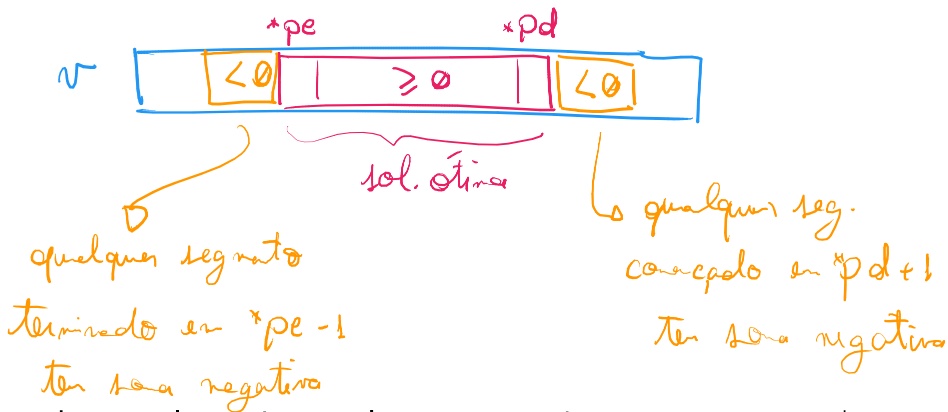
Será que conseguimos fazer melhor?

Observe que, considerando uma solução ótima qualquer no segmento v[*pe .. *pd],

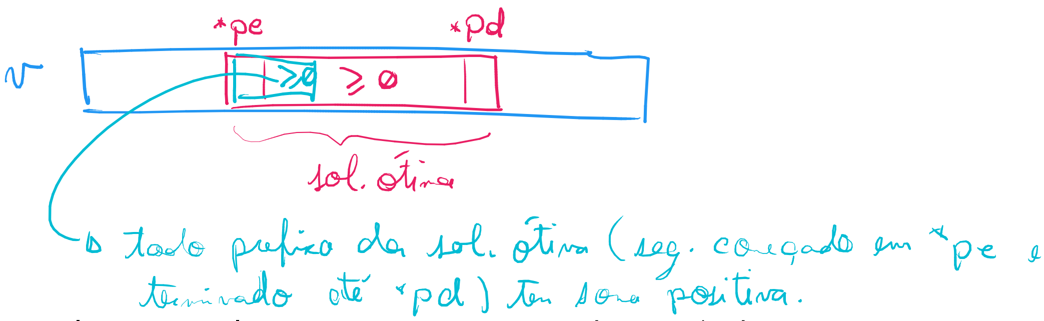
- podemos inferir algumas propriedades interessantes sobre esta.



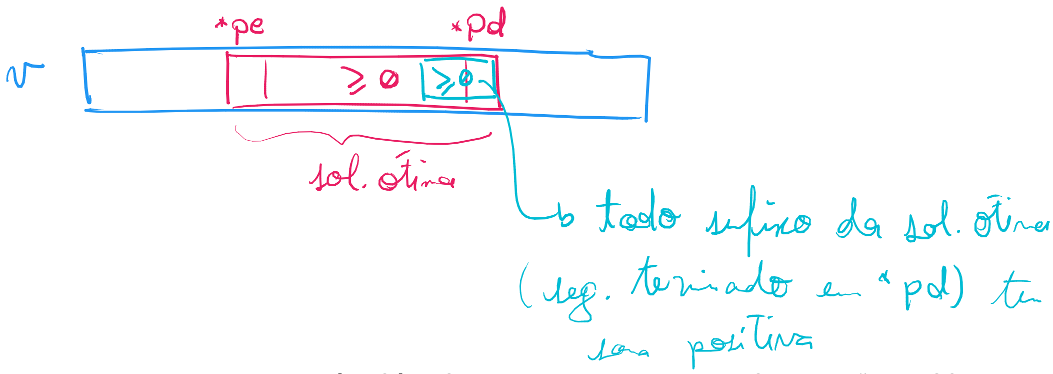
- Qualquer segmento que termina em *pe - 1,
    - i.e., da forma v[k .. *pe - 1], tem soma < 0.
        - Caso contrário, este teria sido adicionado à solução.
- O mesmo vale para qualquer segmento que começa em *pd + 1,
    - i.e., da forma v[*pd + 1 .. k].



- De modo complementar, qualquer segmento que começa em *pe
    - e está contido no subvetor da solução,
        - i.e., da forma v[*pe .. k] com k <= *pd, tem soma >= 0.
            - Caso contrário, este teria sido excluído da solução.

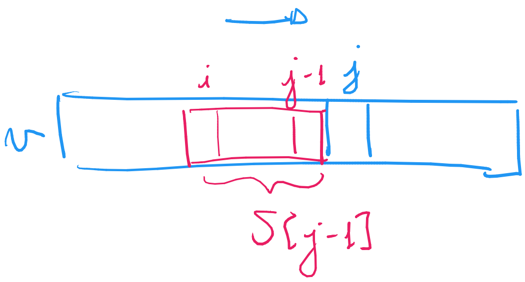


- O mesmo vale para qualquer segmento que termina em *pd
    - e está contido no subvetor da solução,
        - i.e., da forma v[k .. *pd] com k >= *pe.



Sabendo que uma solução ótima nunca começa com um prefixo de custo negativo,

- ○ vamos abordar o problema com um raciocínio recursivo (ou indutivo).
- Isto é, vamos pensar em como resolver nosso problema,
  - ○ usando soluções para instâncias menores do mesmo problema.
- De fato, vamos pensar em instâncias de um problema relacionado,
  - ○ em que o limite direito do intervalo é fixo.
- Vamos calcular $S[j]$, i.e., o segmento de soma máxima
  - ○ que termina e contém j
- Seja $S[j-1] = v[i..j-1]$ um segmento de soma máxima
  - ○ que termina e contém $j - 1$



se $S[j-1] < 0$ então
$S[j] = v[j]$
$i = j$

se $S[j-1] \geq 0$ então
$S[j] = v[j] + S[j-1]$

- Note que, nenhum outro segmento terminado em j - 1
  - ○ pode contribuir tanto para S[j] quanto S[j - 1],
    - ■ já que S[j - 1] é o máximo dos terminados em j - 1.
- Se S[j - 1] >= 0 então acrescentamos a ele v[j], i.e.,
  - ○ S[j] = v[i .. j] é o segmento de soma máxima que termina e contém j.
- Caso contrário, todo segmento que termina e contém j - 1 tem soma < 0,
  - ○ i.e., nenhum destes segmentos contribui para S[j].
- Portanto, S[j] = v[j] é o segmento de soma máxima que termina e contém j.

Essa ideia está por trás do seguinte algoritmo

```c
// encontra o segmento de soma máxima em v[0 .. n - 1] e
// devolve seus limites em *pe, *pd e valor em *psMax
void segMax1(int v[], int n, int *pe, int *pd, int *psMax) {
    int i, j, sAux;
    *psMax = 0;
    *pe = *pd = -1;
    // seja S[j - 1] o seg. soma máx. que termina e contém j - 1
    sAux = 0;                       // SAux guarda o valor de S[j - 1]
    for (i = j = 0; j < n; j++) { // i é o início de S[j - 1]
        if (sAux >= 0)
            sAux += v[j];
        else { // sAux < 0
            sAux = v[j];
            i = j;
        }
        if (sAux > *psMax) {
            *psMax = sAux;
            *pe = i;
            *pd = j;
        }
    }
}
```

O(n)

O(1)

Atualizando o maior segmento

Invariantes e corretude: Observe que, na j-ésima iteração do laço

- v[*pe .. *pd] é um segmento de soma máxima de v[0 .. j-1]
- *psMax = v[*pe] + ... + v[*pd]
- v[i .. j-1] é um segmento de soma máxima com término em j-1
- sAux = v[i] + v[i+1] + ... + v[j-1]

Eficiência de tempo:

- Número de operações no pior caso da ordem de n, i.e., O(n).

Eficiência de espaço:

- Memória auxiliar utilizada é constante em relação à entrada, i.e., O(1).

Uma versão levemente diferente, mas equivalente ao algoritmo anterior.

```
// encontra o segmento de soma máxima em v[0 .. n - 1] e
// devolve seus limites em *pe, *pd e valor em *psMax
void segMax0(int v[], int n, int *pe, int *pd, int *psMax) {
    int i, j, sAux;
    *psMax = 0;
    *pe = *pd = -1;
    // S[j - 1] é um seg. soma máx. que termina, mas pode não conter
j - 1
    sAux = 0;                    // SAux guarda o valor de S[j - 1]
    for (i = j = 0; j < n; j++) { // i é o início de S[j - 1]
        if (sAux + v[j] > 0)
            sAux += v[j];
        else { // sAux + v[j] <= 0
            sAux = 0;
            i = j + 1;
        }
        if (sAux > *psMax) {
            *psMax = sAux;
            *pe = i;          — Atualiza o melhor
            *pd = j;
        }
    }
}
```

- Note que, este algoritmo usa uma variante da ideia recursiva
    - descrita anteriormente, na qual $S[j-1] = v[i..j-1]$
        - é um segmento de soma máxima que termina em $j-1$
    - mas não necessariamente o contém,
        - i.e., o seguimento vazio é uma opção.