

Skip lists



pare e desloca folha

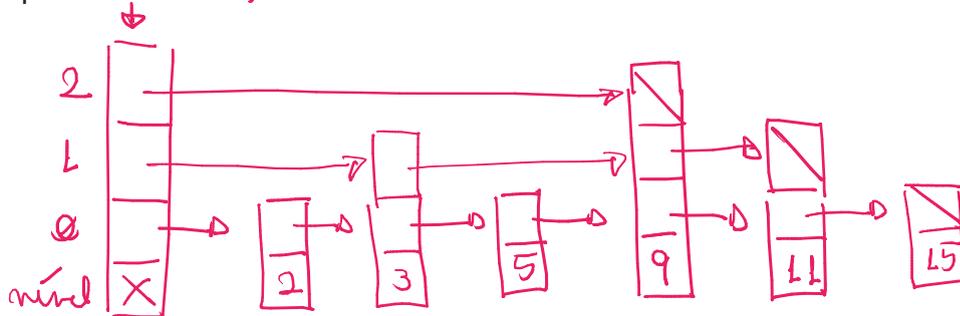
Considere usar uma lista ligada ordenada

- para implementar uma tabela de símbolos.
- Numa busca percorremos a lista até encontrar
 - uma chave maior ou igual que a buscada
 - ou até chegar no fim da lista.
- Essa abordagem não é eficiente, pois localizar um registro,
 - no pior caso, leva tempo proporcional ao tamanho da lista, i.e., $O(n)$

A ideia da estrutura de dados Skip List é usar

- uma hierarquia de listas ligadas ordenadas conectadas entre si,
 - em que cada lista tem uma quantidade de itens diferente,
 - de acordo com o fator de dispersão da estrutura.

Exemplo: *mó cabeça*

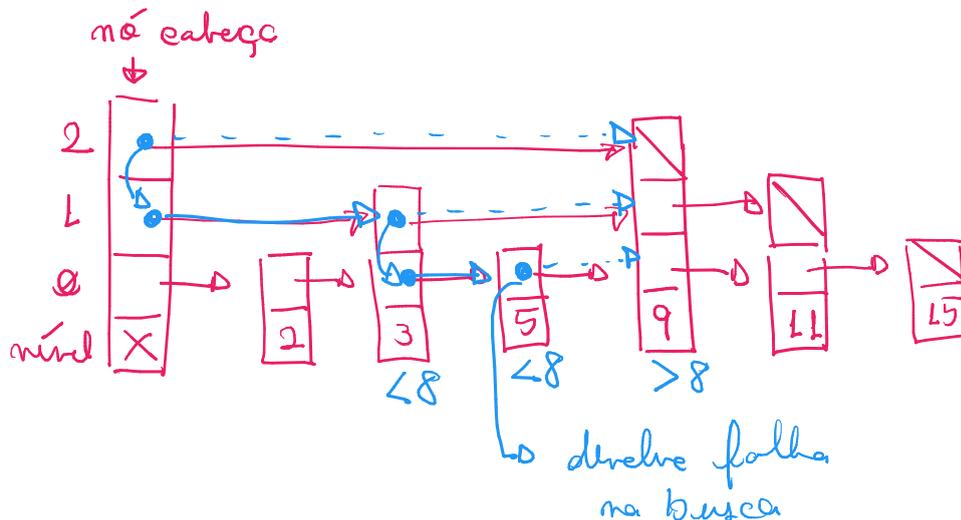


- Note que um item de nível alto sempre aparece nos níveis mais baixos.
- Importante salientar que essa é uma estrutura aleatorizada/probabilística.
 - O motivo para isso veremos mais à frente.

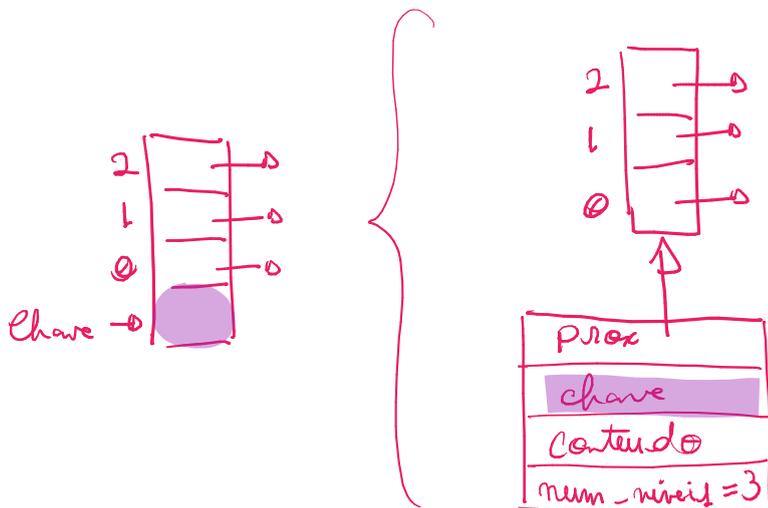
Ideia da busca: começar a percorrer a lista do maior nível, que tem menos itens.

- Quando encontrar o fim da lista
 - ou um item com chave maior do que a buscada,
- continua a busca no nível abaixo, que tem mais itens.

Exemplo de busca pela chave 8:



Antes de analisarmos o código da busca, vamos entender a estrutura dos nós.



→ #define num_max_niveis 100

```
typedef int Chave;
```

```
typedef int Item;
```

```
typedef struct noh {
```

```
    Chave chave; ✓
```

```
    Item conteudo; ✓
```

```
    struct (noh *)prox; → vetor de listas
```

```
    int num_niveis; -
```

```
} Noh;
```

```
static (Noh *)lista; ✓
```

```
static int num_itens, nivel_max;
```

} variáveis globais
p/ simplificar

Código da busca:

```
Noh *buscaR(Noh *t, Chave chave, int nivel) {
```

```
    if (t != lista && chave == t->chave) return t; → encontrar
```

```
    if (t->prox[nivel] == NULL || chave < t->prox[nivel]->chave) { → n° encontrar esse nível
```

```
        → if (nivel == 0) return NULL; → busca falhou
```

```
        return buscaR(t, chave, nivel - 1);
```

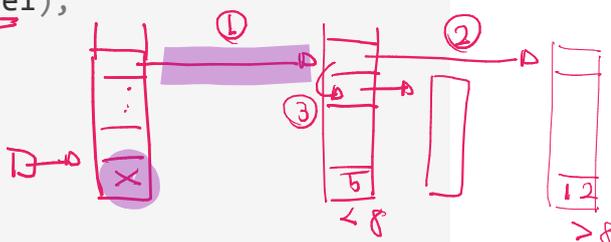
```
    return buscaR(t->prox[nivel], chave, nivel);
```

```
}
```

```
Noh *Tbusca(Chave chave) {
```

```
    return buscaR(lista, chave, nivel_max);
```

```
}
```



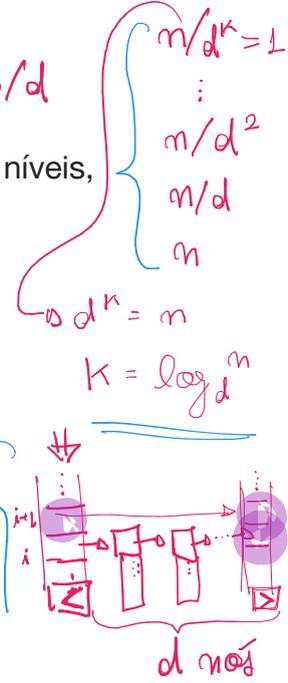
Quiz: transformar essa busca recursiva em iterativa.

Definimos o **fator de dispersão** como um inteiro $d \geq 2$, que indica

- que o número de nós do nível i para o nível $i+1$ cai, em média, de $1/d$

Eficiência de tempo: observe que uma skip list com n itens deve ter $1 + \log_d^n$ níveis,

- o já que o número de itens cai de $1/d$ por nível.
- Além disso, entre dois nós do nível $i+1$ devem existir,
 - o em média, d valores no nível i
- Por isso, esperamos dar $d/2$ saltos por nível, em média,
 - o antes de descer para o nível seguinte.
- Assim, o tempo esperado de busca é $(d/2) \log_d^n = O(\log n)$
 - o derivado do produto do número esperado de níveis
 - pelo número esperado de saltos por nível.
- Por ser uma estrutura probabilística, falamos em eficiência esperada.
 - o Mas essa média depende apenas das escolhas aleatórias
 - da própria estrutura, e não dos valores da entrada.



Eficiência de espaço: skip lists tem, em média, $n \cdot d / (d-1) = O(n)$ blocos. *de memória*

- Para entender de onde vem esse valor, observe que,
 - o o primeiro nível tem n nós, o segundo tem n/d , o terceiro n/d^2 , ...
- Assim, o número esperado de blocos de memória corresponde
 - o à soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG)
 - que começa em n e tem razão $1/d$
- Deduzindo a soma dos termos de uma PG de razão $q < 1$ temos

$$\begin{aligned} \textcircled{-} \text{ Se } S \text{ é PG}(q) &= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \\ q \text{ Se } S \text{ é PG}(q) &= q + q^2 + q^3 + \dots \\ (1-q) \text{ Se } S \text{ é PG}(q) &= (1 + q + q^2 + \dots) - (q + q^2 + \dots) = 1 \\ \text{Se } S \text{ é PG}(q) &= 1 / (1-q) \end{aligned}$$

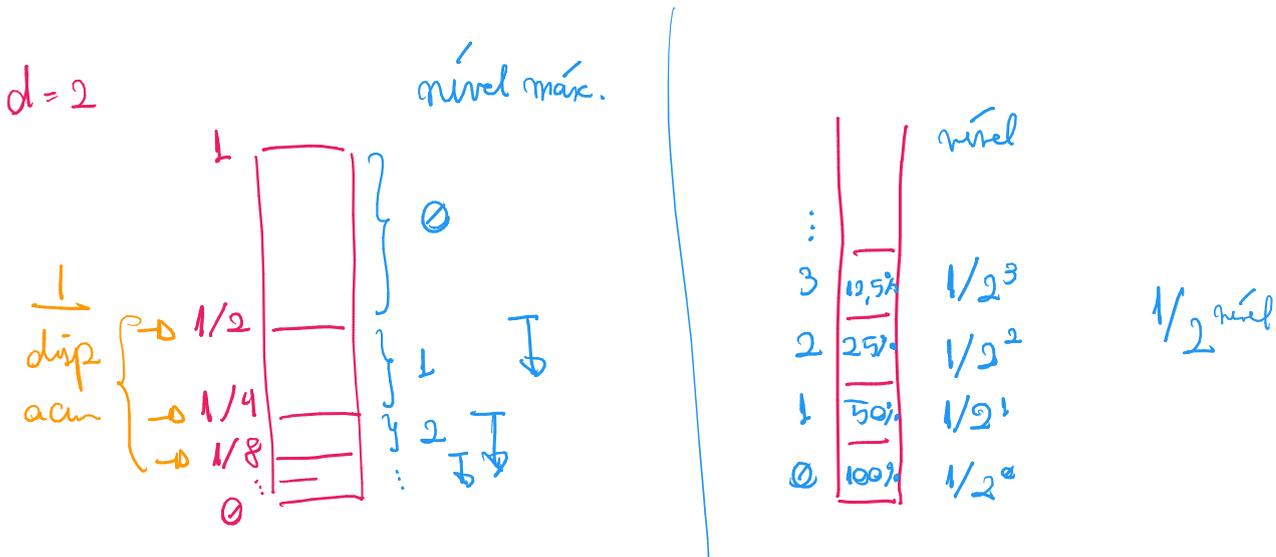
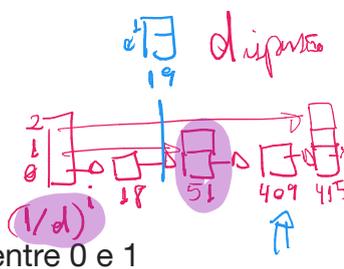
- Como na nossa PG o primeiro termo é n e a razão é $1/d$
 - o sua soma converge para $n \cdot 1 / (1 - 1/d) = \frac{n}{d-1} = n \cdot \frac{d}{d-1} = O(n)$

Relação entre tempo e espaço: dado um fator de dispersão d constante, temos

- eficiência de tempo $d(\log_d^n) / 2 = O(\log n)$
 - o e eficiência de espaço $n \cdot d / (d-1) = O(n)$
- Agora, vamos comparar skip lists com diferentes fatores de dispersão.
 - o Como exemplo, tome $d = 2$
 - tempo = $2 \cdot (\lg n) / 2 = \lg n$
 - espaço = $n \cdot 2 / (2-1) = 2n$
 - o e compare com $d = 10$
 - tempo = $10 (\log_{10} n) / 2 = \frac{10}{2} \left(\frac{\log_2 n}{\log_2 10} \right) = \frac{5}{\log_2 10} \cdot \lg n \approx 1,5 \lg n$
 - espaço = $n \cdot 10 / (10-1) \approx 1,11n$
- Podemos perceber que, quanto maior o fator de dispersão d
 - o mais lenta é a busca e menos espaço ocupa a skip list.

Probabilidade: a ideia central é que a cada novo nível temos menos nós,

- mais especificamente $1/d$ do número de nós do nível anterior,
 - e estes devem estar homogeneamente espaçados.
- Para obter tal resultado precisamos utilizar escolhas aleatórias,
 - de modo que um nó pertença ao nível i com probabilidade $(1/d)^i$
- Para fazer isso, sem jogar múltiplas moedas, sorteamos um valor entre 0 e 1
 - e atribuímos um nível de acordo com o valor sorteado.



- A seguinte função implementa essa ideia

```
int nivelAleatorio() {
    int nivel, disp_acum, d = 2, v = rand();
    disp_acum = d;
    for (nivel = 0; nivel < num_max_niveis; nivel++) {
        if (v > RAND_MAX / disp_acum) break;
        disp_acum *= d;
    }
    if (nivel > nivel_max) nivel_max = nivel;
    return nivel;
}
```

$v \in [0, RAND_MAX]$
 $\frac{v}{RAND_MAX} > \frac{1}{disp_acum}$

- Observe que, essa função sorteia um valor v e
 - quanto menor tal valor maior será o nível do nó.
- Note que, no início do laço valem os invariantes

$$disp_acum = d^{(nivel + 1)}$$

$$RAND_MAX \leq \frac{1}{d^{nivel}}$$
- Como $v = rand()$ recebe um valor aleatório e uniforme entre 0 e $RAND_MAX$
 - o que estamos fazendo é sortear um valor entre 0 e 1
- e colocando o nó num nível j se o valor sorteado for $\leq 1/d^j$
 - o que ocorre com probabilidade $1/d^j$

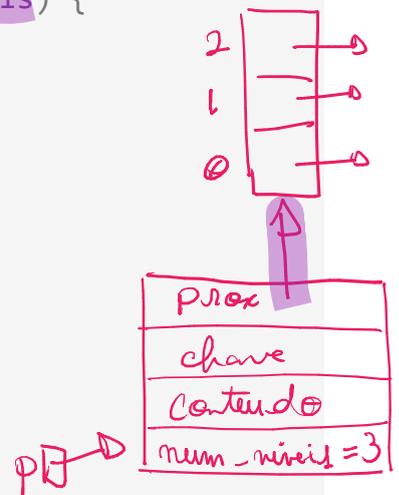
Ideia da inserção: sortear um nível para o novo nó,

- percorrer um caminho semelhante ao da busca até
 - chegar na posição que o nó deveria ocupar no nível sorteado,
- então inserir o nó em todas as listas com nível menor ou igual ao dele.

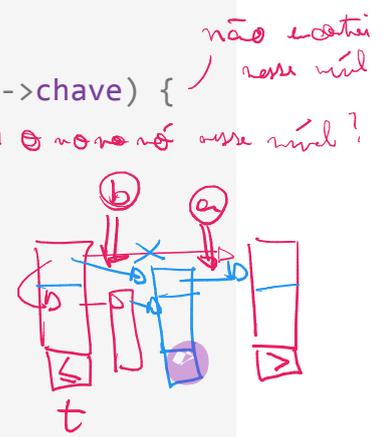
Código da inserção:

```
void TSinsere(Chave chave, Item conteudo) {
    => int nivelAleat = nivelAleatorio();
    Noh *novoNoh = novo(chave, conteudo, nivelAleat + 1);
    insereR(lista, novoNoh, nivel_max);
    num_itens++;
}
```

```
Noh *novo(Chave chave, Item conteudo, int num_niveis) {
    int i;
    Noh *p = (Noh *)malloc(sizeof *p);
    p->chave = chave;
    p->conteudo = conteudo;
    p->prox = malloc(num_niveis * sizeof(Noh *));
    p->num_niveis = num_niveis;
    for (i = 0; i < num_niveis; i++)
        p->prox[i] = NULL;
    return p;
}
```



```
void insereR(Noh *t, Noh *novoNoh, int nivel) {
    Chave chave = novoNoh->chave;
    => if (t->prox[nivel] == NULL || chave < t->prox[nivel]->chave) {
        if (nivel < novoNoh->num_niveis) {
            novoNoh->prox[nivel] = t->prox[nivel];
            t->prox[nivel] = novoNoh;
        }
        if (nivel > 0) insereR(t, novoNoh, nivel - 1);
        return;
    }
    => insereR(t->prox[nivel], novoNoh, nivel);
}
```



Eficiência de tempo: inserção faz, em média, $(d/2) \log_d n = O(\log n)$ comparações, sendo $d \geq 2$ o fator de dispersão da skip list.

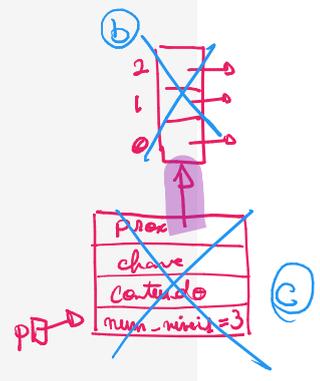
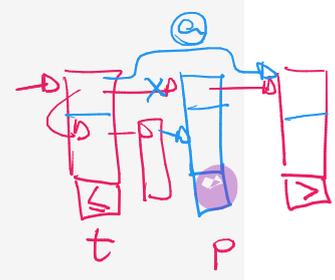
Ideia da remoção: a ideia é **buscar** o nó normalmente,

- removê-lo de todas as listas com nível menor ou igual ao dele,
- e então liberar o nó em si.

Código da remoção:

```
int remove(Noh *t, Chave chave, int nivel) {
    Noh *p = t->prox[nivel];
    if (p == NULL || chave <= p->chave) {
        if (p != NULL && chave == p->chave) {
            t->prox[nivel] = p->prox[nivel];
            if (nivel == 0) {
                free(p->prox);
                free(p);
                return 1; "sucesso"
            }
        }
        if (nivel == 0) return 0; "fracasso"
        return remove(t, chave, nivel - 1);
    }
    return remove(t->prox[nivel], chave, nivel);
}
```

não deve continuar a busca neste nível



```
void TSremove(Chave chave) {
    if (remove(lista, chave, nivel_max))
        num_itens--;
}
```

*# de pontos por nível
⇓
de níveis*

Eficiência de tempo: remoção faz, em média, $(d/2) \log_d n = O(\log n)$ comparações, sendo $d \geq 2$ o fator de dispersão da skip list.

Bônus: observe que, nas várias funções as chamadas recursivas

- são feitas por último, o que caracteriza **recursão caudal**.
- Neste caso, é relativamente simples substituir essas chamadas recursivas
 - por um laço, que envolve a função e tem condições de parada
 - complementares ao caso base da recursão,
 - junto da reatribuição de valores para os parâmetros da função
 - nos pontos em que ocorriam as chamadas recursivas.
- **Desafio:** implementar a versão iterativa das funções da skip list.