Algoritmos e Estruturas de Dados 1 (AED1)

Algoritmos de enumeração

> Often it appears that there is no better way to solve a problem
> than to try all possible solutions. This approach, called exhaustive search,
> is almost always slow, but sometimes it is better than nothing.
> — Ian Parberry, Problems on Algorithms

Para resolver certos problemas combinatórios,

- é necessário enumerar (i.e., fazer uma lista com)
  - todos os objetos de um determinado tipo.

O número de objetos a enumerar é tipicamente muito grande.

- Por isso, os algoritmos enumerativos costumam consumir muito tempo.
  - Mas, certas vezes é o melhor que podemos fazer, ou
    - ao menos é um ponto de partida.

Enumeração de subconjuntos

Talvez o mais comum desses problemas seja

- apresentar todos os subconjuntos de um conjunto S dado.

Como exemplo, dado S = {1, 2, 3}, seus subconjuntos são:

{ }, {1}, {2}, {1, 2}, {3}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}

Qual o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos?

- Resp.: 2^n, pois cada elemento pode ou não estar num subconjunto,
  - sendo assim responsável por dobrar o número de subconjuntos.

Nosso algoritmo vai gerar todos os subconjuntos do conjunto S,

  - começando com uma lista que só tem o conjunto vazio,
- e para cada novo elemento considerado,
  - vai dobrar o número de subconjuntos na lista,
    - ao produzir um subconjunto que tem o elemento atual,
      - para cada subconjunto na lista até o momento.
- Exemplo gerando subconjuntos com elemento 4 a partir da lista do {1, 2, 3}

{4}, {1, 4}, {2, 4}, {1, 2, 4}, {3, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}

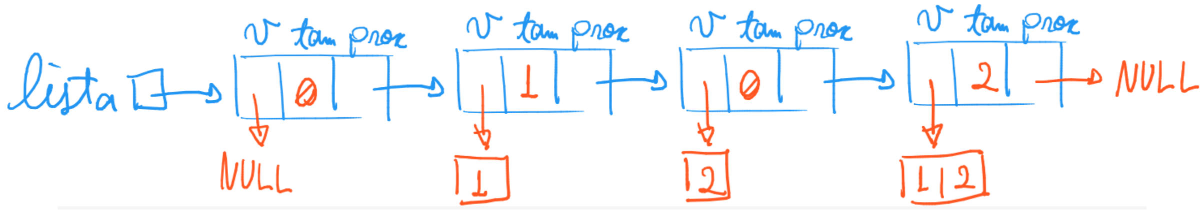
O invariante principal do laço externo do algoritmo será

- no início da i-ésima iteração todos os subconjuntos
  - com elementos de {1, …, i - 1} já estão na lista.

Eficiência de tempo: Pelo menos da ordem de 2^n,

  - uma vez que o algoritmo gera todos os subconjuntos.

Exemplo de nó com subconjunto e lista de nó do exemplo anterior




```
typedef struct noh {
    int *v;  // armazena os elementos do subconjunto
    int tam; // numero de elementos do subconjunto
    struct noh *prox;
} Noh;

void imprimeSubConj(int *v, int n)

void imprimeLista(Noh *lista)

// cria um subconjunto vazio e devolve um apontador para o Noh
Noh *criaSubConjVazio() {
    Noh *subConj = malloc(sizeof(Noh));
    subConj->v = NULL;
    subConj->tam = 0;
    subConj->prox = NULL;
    return subConj;
}

// cria novo subconjunto com os elementos de v[0 .. tam - 1] + elem
// e devolve um apontador para o Noh
Noh *criaSubConj(int *v, int tam, int elem) {
    Noh *subConj = malloc(sizeof(Noh));
    subConj->v = malloc((tam + 1) * sizeof(int));
    subConj->tam = tam + 1;
    subConj->prox = NULL;
    for (int i = 0; i < tam; i++)
        subConj->v[i] = v[i];
    subConj->v[tam] = elem;
    return subConj;
}

Noh *liberaSubConj(Noh *subConj)

Noh *liberaLista(Noh *lista)
```

- Quiz1: Implementar funções apenas declaradas.

```c
// devolve lista com todos os subconjunto de {1, ..., n}
void subConjI(int n) {
    Noh *lista = criaSubConjVazio();
    Noh *ultimoLista = lista;
    // imprimeLista(lista);
    for (int elem = 1; elem <= n; elem++) {
        Noh *aux = lista;
        Noh *novaLista = NULL;
        Noh *ultimoNovaLista = NULL;
        while (aux != NULL) { // criando nova lista colocando em
cada subconjunto da anterior o elem
            Noh *novoSubConj = criaSubConj(aux->v, aux->tam, elem);
            imprimeLista(novoSubConj);
            if (novaLista == NULL) {
                novaLista = novoSubConj;
                ultimoNovaLista = novaLista;
            }
            else {
                ultimoNovaLista->prox = novoSubConj;
                ultimoNovaLista = ultimoNovaLista->prox;
            }
            aux = aux->prox;
        }
        // conectando novaLista no final de lista
        ultimoLista->prox = novaLista;
        ultimoLista = ultimoNovaLista;
    }
    imprimeLista(lista);
    lista = liberaLista(lista);
}
```

Eficiência de tempo: pelo menos da ordem de 2^n,

- uma vez que o algoritmo gera todos os subconjuntos.
    - Analisando com mais cuidado, percebemos que é O(n * 2^n).
- Quiz2: Como um algoritmo com dois laços aninhados
    - acaba com tempo ao menos 2^n?
- Quiz3: De onde vem o fator n da eficiência?

Enumeração de subsequências em ordem lexicográfica

Uma subsequência é o que sobra de uma sequência
- quando alguns de seus termos são apagados.

Mais precisamente, uma subsequência de s_1, s_2, …, s_n é
- qualquer sequência s_i1, s_i2, …, s_ik,
    - com 1 <= i1 < i2 < … < ik <= n
- Note que, a ordem dos termos não é alterada.

Como exemplo, dada a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, temos as subsequências
- 2, 3, 5, 8
- 1, 4, 5, 7, 8
- 2, 3, 5

Nosso problema é:
- Dado n, enumerar todas as subsequências de 1, 2, …, n, ou seja,
    - fazer uma lista em que cada subsequência aparece uma única vez.

Exemplos:
- Para n = 3

  1
  1 2
  1 2 3
  1 3
  2
  2 3
  3
- Para n = 4

  1
  1 2
  1 2 3
  1 2 3 4
  1 2 4
  1 3
  1 3 4
  1 4
  2
  2 3
  2 3 4
  2 4
  3
  3 4
  4

Note que, entre as subsequências de 1, 2, …, n

- e os subconjuntos de {1, 2, …, n},
    - há uma correspondência 1 para 1,
        - exceto pelo fato de não listarmos a sequência vazia.
- Por isso, o número de subsequências de 1, 2, …, n
    - é 2^n - 1.

Um adendo para o nosso problema,

- queremos que as subsequências sejam listadas em ordem lexicográfica,
    - que é a ordem do dicionário.

Mais precisamente, uma sequência r_1, r_2, …, r_j é

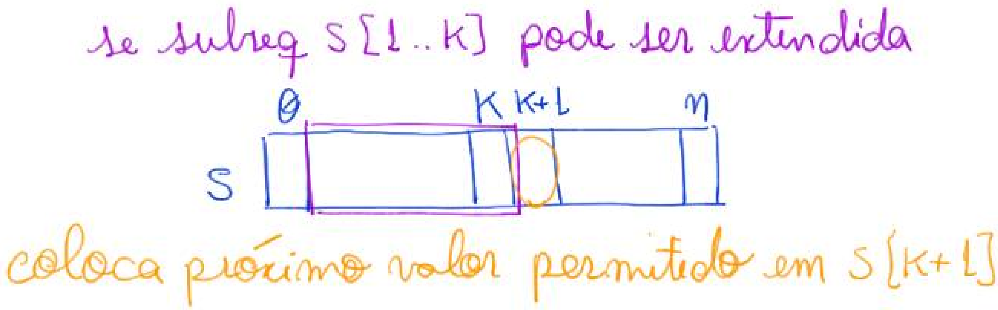
- lexicograficamente menor que s_1, s_2, …, s_k se
    - j < k e r_1, …, r_j igual a s_1, …, s_j ou
    - existe i tal que r_1, …, r_i-1 igual a s_1, …, s_i-1 e r_i < s_i.
- Ou seja, r_1, …, r_j é um prefixo de s_1, …, s_k ou
    - as subsequências tem um prefixo comum
        - e o primeiro valor distinto é menor em r_1, …, r_j.

Destacamos que, em geral, a ordem das subsequências não é importante,

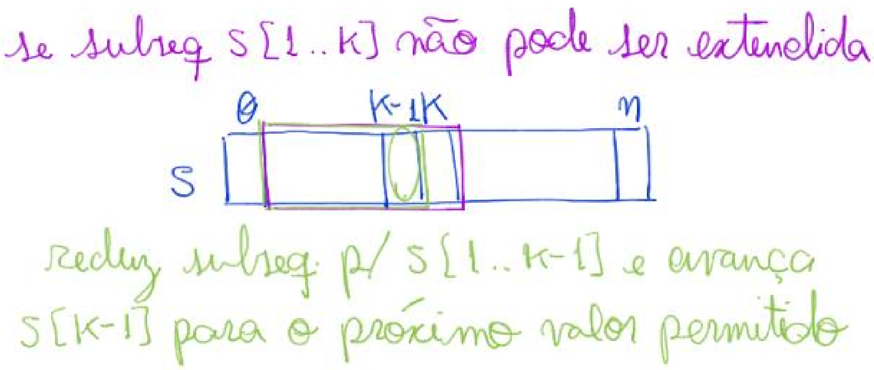
- mas pode nos ajudar a organizar nosso algoritmo.

Primeiro veremos um algoritmo iterativo para o problema,

- que constrói as subsequências em um vetor s e
    - cujas ideias podem ser ilustradas nas seguintes figuras



- Note que, uma sequência pode ser estendida
    - enquanto seu último valor não for n.
- Além disso, o próximo valor permitido para a posição k + 1,
    - para gerar as sequências em ordem lexicográfica, é s[k] + 1.



- De modo semelhante, próximo valor permitido em s[k - 1],
    - que respeita a ordem lexicográfica, é s[k - 1] + 1.

Código do algoritmo iterativo para gerar subsequências em ordem lexicográficas

```
void subSeqLex(int n) {
    int *s, k;
    s = malloc((n + 1) * sizeof(int));
    s[0] = 0;
    k = 0;
    while (1) {
        if (s[k] < n) { // subseq pode ser extendida
            s[k + 1] = s[k] + 1;
            k += 1;
        }
        else // s[k] == n -  reduz subseq e avança valor do anterior
            s[k - 1] += 1;
            k -= 1;
        }
        if (k == 0)
            break;
        imprima(s, k);
    }
    free(s);
}
```

Eficiência de tempo: Da ordem de n * 2^n, i.e., O(n * 2^n),

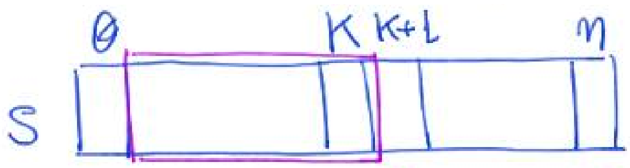
- uma vez que o algoritmo imprime uma subsequência por iteração.

Agora veremos um algoritmo recursivo para o problema,

- cujas ideias podem ser ilustradas nas seguintes figuras.

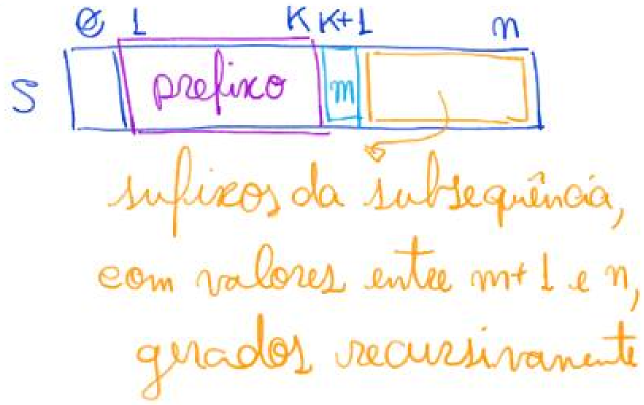
A função recursiva visa gerar todas as subsequências

- com prefixo s[1 .. k] em ordem lexicográfica.

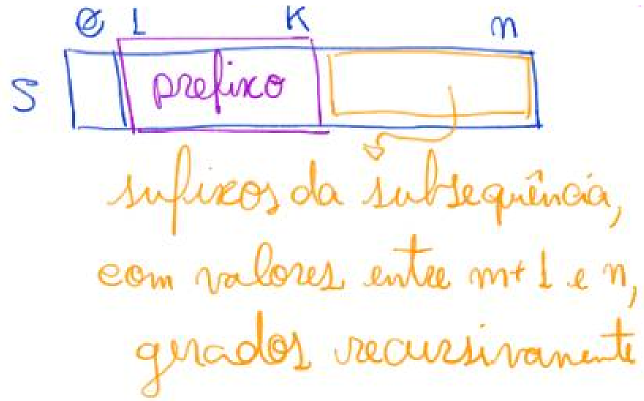


- Para cada elemento m válido para a posição s[k + 1],
    - sendo válido m entre s[k] < m <= n,
        - coloque m em s[k + 1] e imprima esta subsequência.

- Então, gere recursivamente todas as subsequências com prefixo s[1 .. k + 1],
    - com s[k + 1] = m.



- E também, gere recursivamente todas as subsequências com prefixo s[1 .. k],
  - sem m no sufixo.



Código do algoritmo recursivo para gerar subsequências em ordem lexicográfica

```
void subSeqLex2(int n) {
    int *s;
    s = malloc((n + 1) * sizeof(int));
    subSeqLexR(s, 0, 1, n);
    free(s);
}

// gera toda subsequência com prefixo s[1 .. k]
// e sufixos com valores em {m, ..., n}
void subSeqLexR(int *s, int k, int m, int n) {
    if (m <= n) {
        s[k + 1] = m;
        imprima(s, k + 1);
        subSeqLexR(s, k + 1, m + 1, n); // inclui m
        subSeqLexR(s, k, m + 1, n);     // não inclui m
    }
}
```

- Note que, a ordem lexicográfica é garantida
  - pela posição da impressão e ordem das chamadas recursivas.

Eficiência de tempo: Da ordem de n * 2^n, i.e., O(n * 2^n),

- uma vez que o algoritmo imprime uma subsequência por chamada recursiva.

Enumeração de permutações

Agora veremos um problema de enumeração um pouco diferente,
- no qual o comprimento dos objetos enumerados não muda,
    - mas a ordem dos seus elementos é alterada.

Dada uma sequência, uma permutação da mesma é qualquer sequência em que
- cada elemento da sequência original apareça uma e apenas uma vez.

Nosso problema é, dado um inteiro positivo n,
- gerar todas as permutações da sequência identidade 1, 2, …, n.

Como exemplo, para n = 3, temos

1, 2, 3
1, 3, 2
2, 1, 3
2, 3, 1
3, 1, 2
3, 2, 1

Note que, o número de permutações de uma sequência de comprimento n,
- que não tem elementos repetidos,
    - é n * (n - 1) * … * 2 * 1 = n!
- Isso porque, qualquer dos n elementos pode aparecer na primeira posição,
    - qualquer dos n - 1 restantes pode aparecer na segunda,
        - e assim por diante.
- Quiz4: fazer a demonstração formal da intuição anterior,
    - usando indução matemática.

Novamente, vamos gerar nossas permutações em ordem lexicográfica.
- Quiz5: analise, no algoritmo, que decisão de projeto gera esse resultado.

A seguir, apresentamos um algoritmo recursivo para esse problema,
    - cuja ideia central é construir incrementalmente as permutações.
- Assim, dado um prefixo da permutação no subvetor s[1 .. k],
    - o algoritmo coloca cada um dos elementos válidos na posição s[k + 1],
        - sendo válidos elementos que não aparecem em s[1 .. k],
- e gera recursivamente as permutações
    - que irão preencher o sufixo s[k + 2 .. n] do subvetor.

Gera toda permutação com prefixo s[1..k]

colocando cada elemento ainda não usado em k+1 e preenchendo o restante recursivamente

Código do algoritmo recursivo para gerar permutações

```c
void perm(int n) {
    int *s = malloc((n + 1) * sizeof(int));
    permR(s, 0, n); // gera todas as permutações de 1, 2, ..., n
    free(s);
}

// gera todas as permutações de 1, 2, ..., n com prefixo s[1 .. k]
void permR(int *s, int k, int n) {
    if (k == n) {
        imprima(s, n);
        return;
    }
    for (int elem = 1; elem <= n; elem++)
        if (!presente(s, k, elem)) {
            s[k + 1] = elem;
            permR(s, k + 1, n);
        }
}

// verifica se x está presente em v[1 .. n]
int presente(int *v, int n, int x) {
    int i;
    for (i = 1; i <= n; i++)
        if (v[i] == x)
            return 1;
    return 0;
}
```

Eficiência de tempo:

- O algoritmo leva pelo menos tempo da ordem de n!,
    - uma vez que o algoritmo gera todas as permutações,
- mas ao considerarmos o tempo que ele gasta
    - para preencher cada posição de uma permutação,
- o tempo total é ainda maior, O(n! * n^2).

Quiz6: Como deixar esse algoritmo mais eficiente usando uma lista ligada?

- Dica: presente não é necessária se usar lista ligada
    - pra manter apenas os elementos disponíveis.

Bônus: Podemos usar implementações eficientes de Tabelas de Símbolos

- como hash tables, para substituir a função presente
    - por uma busca mais eficiente.

Extra - Enumeração de subconjuntos por tamanho

Uma variante do problema de

    - apresentar todos os subconjuntos de um conjunto S dado,
- aqui queremos que os subconjuntos apareçam em ordem de tamanho.

Como exemplo, dado S = {1, 2, 3}, seus subconjuntos são:

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

Qual o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos?

- Resp.: 2^n, pois cada elemento pode ou não estar num subconjunto,
    - sendo assim responsável por dobrar o número de subconjuntos.

Nosso algoritmo vai gerar todos os subconjuntos do conjunto S,

- indo dos menores até os maiores. Note que,
    - o 1° será o conjunto vazio e o último será o próprio conjunto S.

Os subconjuntos terão seus elementos exibidos em ordem crescente.

- Isso é importante para não gerar subconjuntos repetidos,
    - como {1, 2} e {2, 1}.

Os subconjuntos de mesmo tamanho serão exibidos em ordem lexicográfica,

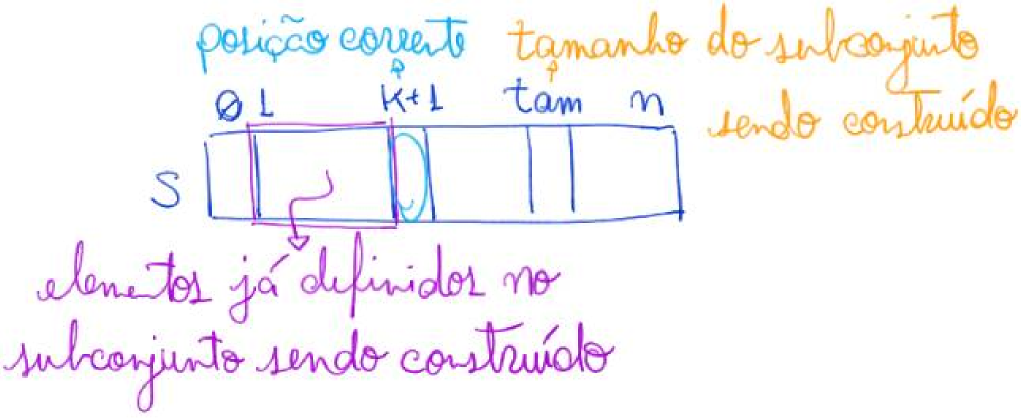
- i.e., ordem alfabética utilizada em dicionários.
- Isso significa que os subconjuntos serão ordenados
    - considerando cada elemento da esquerda para a direita,
- e um subconjunto S aparecerá antes de outro subconjunto S',
    - se o primeiro elemento distinto entre eles for menor em S que em S'.

A ideia do algoritmo é usar uma função recursiva,

    - que gera todos os subconjuntos de um determinado tamanho tam.
- Esta função recursiva será chamada por um laço externo,
    - que varia tam entre 0 e n.

Os conjuntos sendo construídos pela função recursiva

- são armazenados em um vetor s,
    - que começa vazio e tem tamanho n + 1.



Cada chamada da função recursiva,

- considera que o subvetor s[1 .. k] tem a parte já definida
    - do subconjunto sendo construído.
- Assim, ela coloca cada elemento válido na posição corrente s[k + 1] e
    - faz uma chamada recursiva para preencher o restante do subconjunto.

Um elemento é válido para a posição s[k + 1]

- se ele é maior que o elemento em s[k],
    - já que geramos os subconjuntos em ordem crescente,
- e se existem suficientes elementos maiores que ele
    - para fazer o subconjunto atingir tamanho tam.

Além disso, os elementos válidos são testados do menor para o maior,

- para gerar os subconjuntos em ordem lexicográfica.

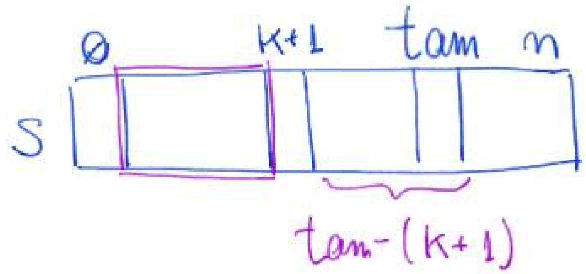
Código do algoritmo recursivo para gerar subconjuntos

```
void subConj(int n) {
    int *s, tam;
    s = malloc((n + 1) * sizeof(int));
    s[0] = 0;
    for (tam = 0; tam <= n; tam++)
        subConjR(s, 0, tam, n); // chamada que gera todos os
subconjuntos de {1, ..., n} de tamanho tam
    free(s);
}

// função que gera todos os subconjuntos de {1, ..., n}
// de tamanho tam que contém os elementos em s[1 .. k]
void subConjR(int *s, int k, int tam, int n) {
    int i;
    if (tam == k) {
        imprima(s, tam); // imprime s[1 .. tam]
        return;
    }
    // laço que testa todos os elementos válidos,
    // em ordem crescente, para a posição s[k + 1]
    for (i = s[k] + 1; i <= n - (tam - (k + 1)); i++)
    { // note que (n - i) >= tam - (k + 1)
        s[k + 1] = i;
        subConjR(s, k + 1, tam, n);
    }
}
```

Se todo valor entre 1 e n é um elemento válido

- para colocar no subconjunto sendo construído,
    - por que no laço temos i <= n - (tam - (k + 1))?
- Note que, isso significa (n - i) >= tam - (k + 1),
    - ou seja, o número de elementos disponíveis é
        - >= que o número de posições por preencher.
- Observe que, como construímos nossos subconjuntos
    - exibindo os elementos em ordem crescente,
- depois de colocar um elemento em s[k + 1] qualquer elemento i
    - disponível para completar o subconjunto
- estará restrito entre s[k + 1] < i <= n,
    - ou seja, temos n - s[k + 1] opções para i.
- Por outro lado, como o subconjunto deve atingir tamanho tam
    - e s já terá k + 1 elementos,
- precisaremos de pelo menos tam - (k + 1) elementos para completá-lo.



- Assim, se um elemento i > n - (tam - (k + 1))
    - for colocado na posição s[k + 1],
- sobram n - s[k + 1] = n - i < n - (n - (tam - (k + 1))) = tam - (k + 1) elementos,
    - que é menos do que precisamos para chegar ao tamanho tam.

Quiz7: Qual a importância de s[0] começar igual a 0?

- Dica: Note que, em subConjR, quando k = 0 temos i = s[0] + 1.