Fila implementada em vetor, interfaces, cálculo de distâncias

Uma fila (no inglês queue) é uma lista dinâmica,

- ou seja, uma sequência em que elementos podem ser removidos e inseridos,
    - mas que possui regras bem específicas de funcionamento.

Em particular, as seguintes regras devem ser obedecidas:

- uma remoção sempre remove o elemento do início da sequência,
    - e uma inserção sempre insere o elemento no fim da sequência.

Costumamos resumir o comportamento de uma fila na frase

- o primeiro a entrar é o primeiro a sair.

- Por isso, filas também são conhecidas por FIFO,
    - acrônimo do inglês First-In-First-Out.

Implementação de fila usando vetor

Uma fila q é armazenada em um vetor de tamanho n

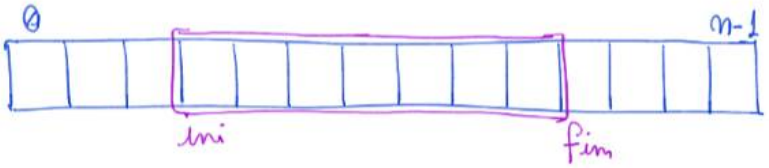
- alocado estática ou dinamicamente.

Um inteiro fim indica o final da fila,

- que é 1 a mais que a posição do último elemento
    - e é a posição do próximo elemento a ser inserido.

Um inteiro ini indica o início da fila,

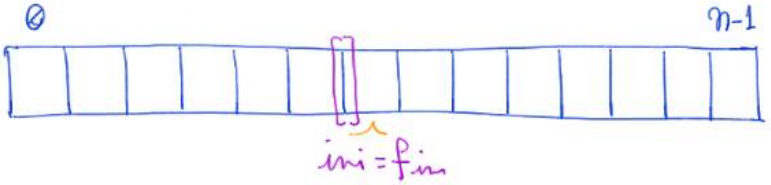
- que é a posição do primeiro elemento
    - e é a posição do próximo elemento a ser removido.



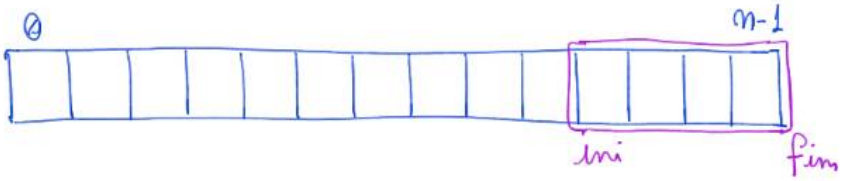
Note que (fim - ini) corresponde ao número de elementos presentes na fila,

- e que 0 <= ini <= fim <= n.

- Assim,
    - se fim - ini = 0, ou seja, fim = ini, a fila está vazia



    - se fim = n a fila está cheia.



Para inserir um elemento x fazemos
    - q[fim++] = x;
- que corresponde a
    - q[fim] = x; fim = fim + 1;
- Note que, esta operação não é segura se a fila estiver cheia,
    - i.e., se fim = n.

Para remover um elemento e armazená-lo em x fazemos
    - x = q[ini++];
- que corresponde a
    - x = q[ini]; ini = ini + 1;
- Note que, esta operação não é segura se a fila estiver vazia,
    - i.e., se ini = fim.

Note que, as operações de manipulação da fila
- levam tempo constante em relação ao tamanho da mesma, i.e., O(1).

Se o número de elementos crescer muito, a fila pode ficar cheia.
- Neste caso, uma alternativa é redimensionar a fila, por exemplo,
        - alocando um vetor com o dobro do tamanho do anterior
    - e copiando todos os elementos do vetor anterior para esse novo,
        - preservando a ordem dos elementos.
- No entanto, observe que esta implementação também apresenta limitação
    - quanto ao número máximo de operações de inserção,
        - ainda que o número de elementos na fila não aumente.
    - Quiz1: Por que?
        - E como evitar isso sem redimensionar o vetor?

Biblioteca para fila implementada em vetor

Segue o código da interface fila.h:

```
typedef struct fila Fila;

Fila *criaFila();
void insereFila(Fila *q, char x);
char removeFila(Fila *q);
int filaVazia(Fila *q);
int filaCheia(Fila *q);
void imprimeFila(Fila *q);
int tamFila(Fila *q);
Fila *liberaFila(Fila *q);
```

A seguir temos a implementação da biblioteca usando vetor.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#include "fila.h"

#define TAM_MAX 100

struct fila {
    char *vetor;
    int ini;
    int fim;
};

Fila *criaFila() {
    Fila *q;
    q = (Fila *)malloc(sizeof(Fila));
    q->vetor = (char *)malloc(TAM_MAX * sizeof(char));
    q->ini = 0;
    q->fim = 0;
    return q;
}

void insereFila(Fila *q, char x) {
    q->vetor[q->fim] = x;
    (q->fim)++;
}

char removeFila(Fila *q) {
    char x;
    x = q->vetor[q->ini];
    (q->ini)++;
    return x;
}

int filaVazia(Fila *q) {
    return q->fim == q->ini;
}
```

```c
int filaCheia(Fila *q) {
    return q->fim == TAM_MAX;
}

void imprimeFila(Fila *q) {
    for (int i = q->ini; i < q->fim; i++)
        printf("%c ", q->vetor[i]);
    printf("\n");
}

int tamFila(Fila *q) {
    return q->fim - q->ini;
}

Fila *liberaFila(Fila *q) {
    free(q->vetor);
    free(q);
    return NULL;
}
```

Compilando biblioteca

Para implementar e compilar um programa que usa nossa biblioteca,

- primeiro incluímos uma chamada para ela no início do programa,
  ```c
  #include "fila.h"
  ```
- então compilamos a biblioteca em um programa objeto
  “gcc -c fila.c” ou
  “gcc -Wall -O2 -pedantic -Wno-unused-result -c fila.c”
- e, finalmente, compilamos o programa principal usando esse programa objeto
  “gcc fila.o usaFila.c -o usaFila” ou
  “gcc -Wall -O2 -pedantic -Wno-unused-result fila.o usaFila.c -o usaFila”

Também podemos compilar o programa principal em um programa objeto
“gcc -c usaFila.c” ou
“gcc -Wall -O2 -pedantic -Wno-unused-result -c usaFila.c”

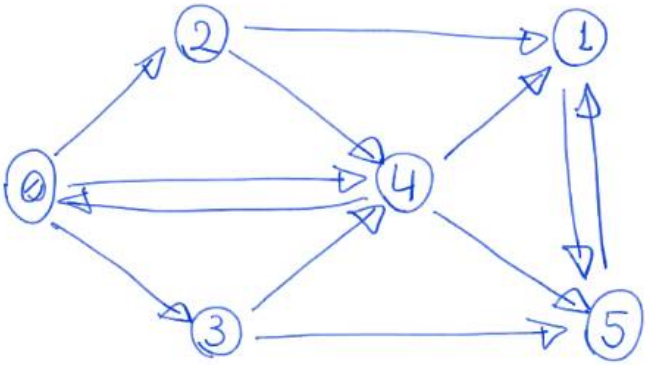
- e então compilar os dois programas objetos no executável
  “gcc fila.o usaFila.o -o usaFila”

Ou, no extremo oposto, compilar tudo diretamente, sem usar programas objeto
“gcc fila.c usaFila.c -o usaFila” ou
“gcc -Wall -O2 -pedantic -Wno-unused-result fila.c usaFila.c -o usaFila”

Aplicação de fila para cálculo de distâncias

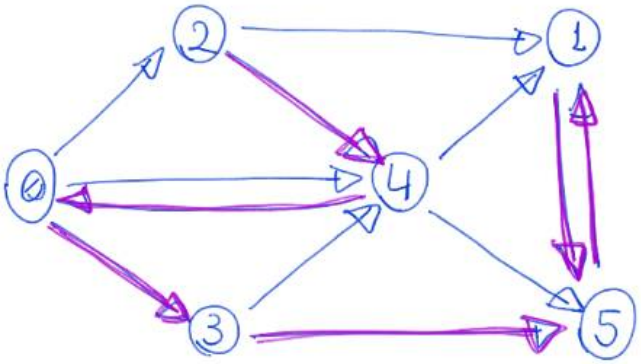
Considere n cidades, numeradas de 0 a n - 1

- e interligadas por estradas de mão única.



Um caminho que liga duas cidades i e j é uma sequência de cidades, tal que
    - a primeira cidade é i, a última cidade é j,
- e se cidades h e k aparecem uma seguida da outra no caminho,
    - então existe uma estrada indo de h para k.

O comprimento de um caminho é o número de estradas neste caminho, i.e.,
    - o número de saltos entre cidades adjacentes.
- Note que, o comprimento de um caminho
    - que contém n cidades (contando repetições) é n - 1.

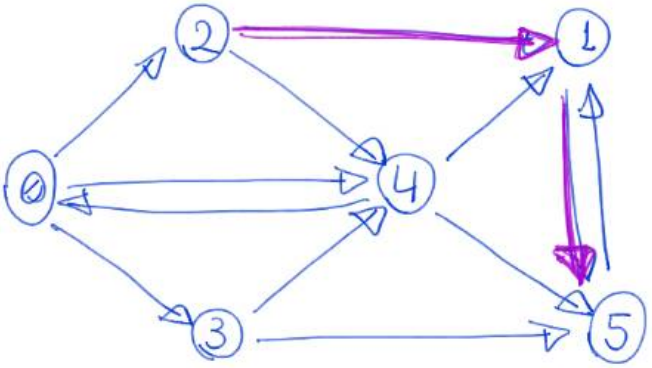


2 - 4 - 0 - 3 - 5 - 1 - 5

Comprimento = 6

A distância de uma cidade i a uma cidade j é

- o comprimento do menor caminho de i até j.



Distância de 2 até 5 = 2

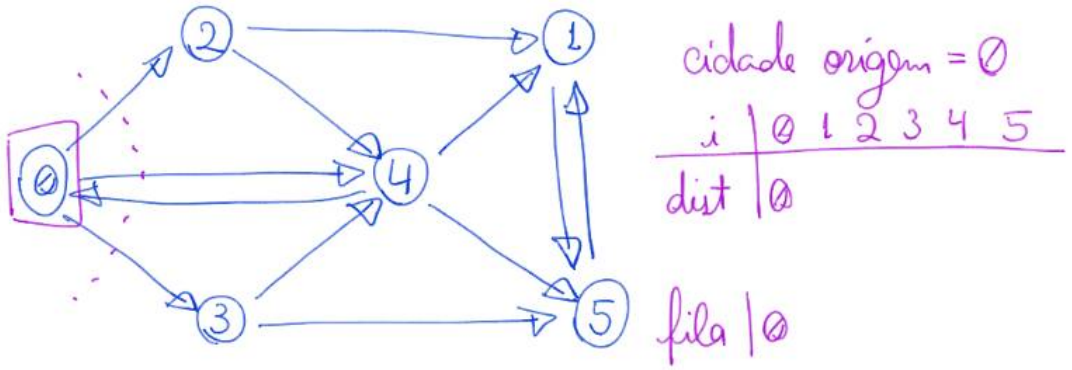
    - Se não existir caminho, a distância é infinita.
- Note que, a definição de distância já inclui ideia de minimalidade.
- Por isso, expressões como
    - “distância mínima” ou “menor distância” são pleonasmos
    - e valem dois pontos - https://www.youtube.com/watch?v=vy43cO9cXks

Queremos resolver o problema de

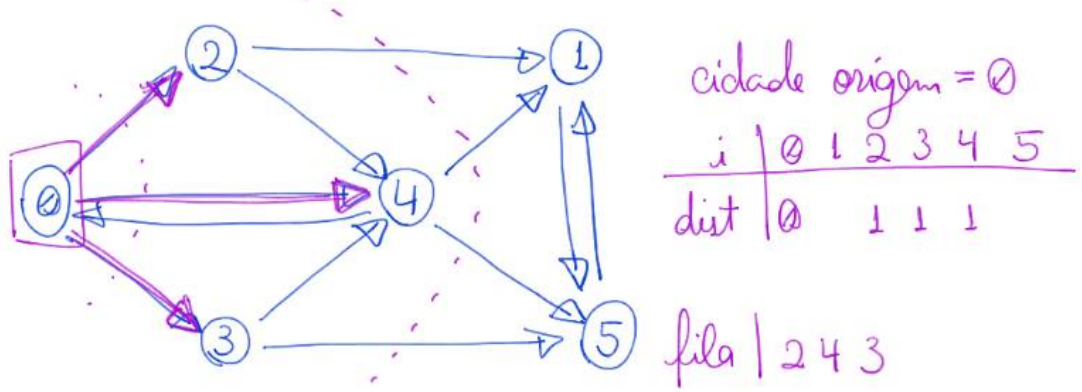
- calcular a distância de uma cidade de origem
    - até todas as demais cidades da nossa rede.
- Observe que este é problema do cálculo de distâncias não ponderado,
    - pois não existem pesos/custos associados às estradas.
- Embora essa restrição possa causar estranheza,
    - esse problema surge naturalmente quando calculamos distâncias
        - em certos tipos de redes, como nas redes sociais.

Exemplo de solução:

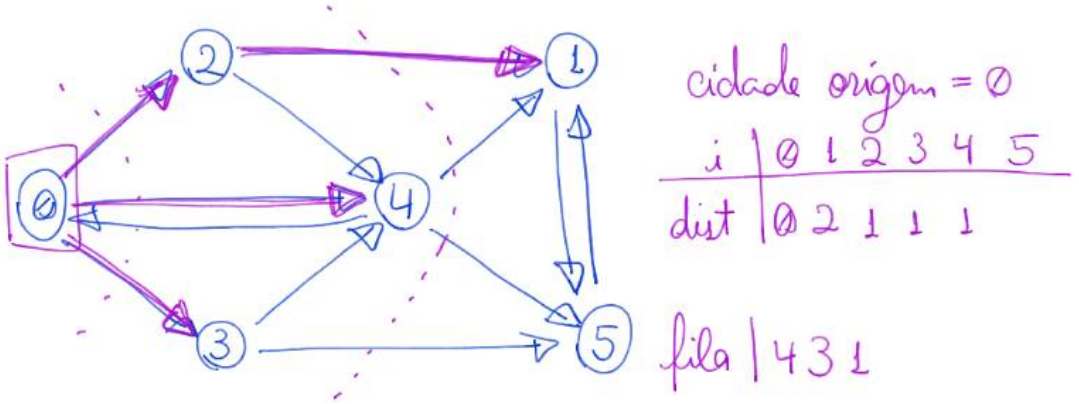
- No início apenas a cidade origem = 0 é alcançável e tem distância 0.



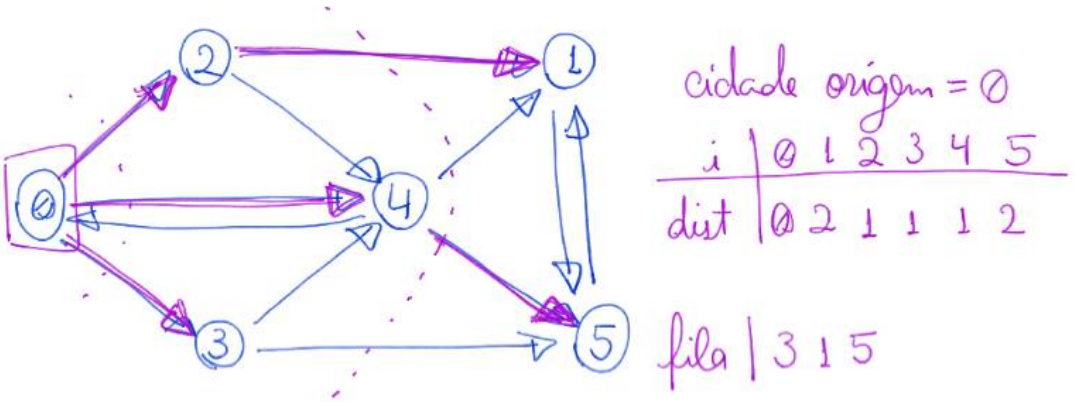
- Em cada iteração podemos encontrar novas cidades
    - e atualizar suas distâncias como
        - sendo 1 a mais que a distância de quem a encontrou.



- Observe a importância de armazenar as cidades descobertas numa fila
    - para preservar a ordem de descoberta
        - e assim calcular corretamente as distâncias.



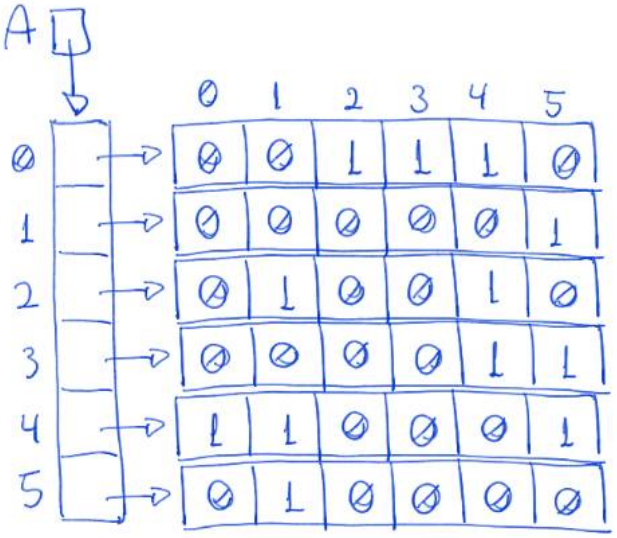
- Por exemplo, se usássemos uma pilha, primeiro encontraríamos
    - o caminho que vai até 5 passando por 1,
        - que tem comprimento 3.



- Depois de alcançar todas as cidades podemos parar,
    - ou quando a fila ficar vazia.

Representação da rede:

- temos uma matriz n x n de 0s e 1s.
- Se existe estrada de i para j então A[i][j] = 1,
    - caso contrário A[i][j] = 0



Código:

```c
// A função recebe uma matriz de inteiros Rede de dimensão n e um
// inteiro origem, sendo 0 <= origem < n. Ela devolve um vetor
// contendo a distância de origem até cada elemento entre 0 e n-1.
int *distancias(int **Rede, int n, int origem) {
    int i, corr; // auxiliar que guarda a cidade corrente
    int *dist;
    int *fila;
    int ini, fim;

    dist = malloc(n * sizeof(int));
    /* inicializa a fila */
    fila = malloc(n * sizeof(int));
    ini = 0;
    fim = 0;
```

```
    /* inicializa todos como não encontrados, exceto pela origem */
    for (i = 0; i < n; i++)
        dist[i] = -1;
    dist[origem] = 0;
    /* colocando origem na fila */
    fila[fim++] = origem;
    /* enquanto a fila dos ativos (encontrados mas não visitados)
não estiver vazia */
    while (fim != ini) {
        /* remova o mais antigo da fila */
        corr = fila[ini++];
        /* para cada vizinho deste que ainda não foi encontrado */
        for (i = 0; i < n; i++)
            if (Rede[corr][i] == 1 && dist[i] == -1) {
                /* calcule a distância do vizinho */
                dist[i] = dist[corr] + 1;
                fila[fim++] = i; // e o coloque na fila
            }
    }
    free(fila);
    return dist;
}
```

Intuitivamente, o algoritmo calcula corretamente as distâncias, pois

- ao retirar uma cidade da fila (que chamaremos de cidade corrente),
    - todos as cidades mais próximas da origem que ela já foram analisadas
        - e as distâncias dos vizinhos destas já foram atualizadas.
- Assim, se a cidade corrente tiver vizinhos ainda não alcançados,
    - ela é a cidade mais próxima da origem que os alcança
        - e, portanto, um caminho mínimo até eles passa por ela.

Eficiência de tempo:

- O(n^2), sendo n o número de cidades.
- Isso porque, em cada iteração do laço externo do algoritmo
    - temos um nó “corrente” corr retirado da fila.
- Note que, cada nó entra na fila no máximo uma vez,
        - também sendo retirado no máximo uma vez.
    - Portanto, o número de iterações do laço externo <= n.
- Em cada iteração do laço interno do algoritmo,
    - verificamos todos as n cidades,
        - para encontrar as vizinhas de corr.
- Assim, para cada uma das n iterações do laço externo
    - temos da ordem de n iterações do laço interno.

Eficiência de espaço: Fila auxiliar e vetor dist
    - ocupam espaço adicional da ordem de n, i.e., O(n).
- Quiz2: Matriz de entrada ocupa espaço O(n^2).
    - Será que isso é necessário?
- Considere o cenário citado das redes sociais,
    - nas quais temos bilhões de “cidades”,
        - mas cada “cidade” tem poucas “vizinhas”.

Invariante e corretude (opcional):
- Dizemos que uma cidade i é encontrada quando ela é colocada na fila.
    - Isso porque, i só é colocada na fila se o algoritmo
        - encontrou um caminho até i e atualizou dist[i].
- Dizemos que uma cidade corr é visitada depois da iteração
    - em que ela foi removida da fila.
    - Isso porque, nesta iteração são analisadas
        - todas as estradas que conectam corr a seus vizinhos.
- Note que, na fila estão apenas as cidades encontradas e ainda não visitadas.
- Os invariantes principais, que valem no início de cada iteração do while, são:
    1. Todas as cidades encontradas estão com a distância correta em dist[ ].
    2. Todas as cidades vizinhas de cidades visitadas já foram encontradas.
    3. Para algum inteiro não negativo k, temos que na fila estão
        - zero ou mais cidades à distância k da cidade origem,
        - seguidos de zero ou mais cidades à distância k + 1 da origem.
    4. Todas as cidades com distância < k já foram visitadas
- Note que os invariantes valem trivialmente no início da primeira iteração
    - já que apenas a cidade origem foi encontrada
        - e nenhuma cidade foi visitada.
- O invariante se preserva de uma iteração para outra, pois
    - removemos da fila a cidade corr mais antiga
        - dentre as encontradas e ainda não visitadas.
        - Note que, pelo invariante 3, corr tem distância k da origem.
    - Então, verificamos cada vizinho i de corr ainda não encontrado
        - e atualizamos dist[i] = dist[corr] + 1 = k + 1.
    - Note que, existe um caminho da origem até i
        - passando por corr com comprimento k + 1.
    - Note também que, todo caminho mais curto até i
        - precisaria passar por alguma cidade
            - vizinha de i que tenha distância < k.
    - Pelo invariante 4, sabemos que estas cidades já foram visitadas.
    - Pelo invariante 2, temos que os vizinhos destas já foram encontrados.
    - Como i ainda não havia sido encontrado,
        - temos que ele não é vizinho de uma cidade com distância < k,
            - e que não existe caminho até i com comprimento < k + 1.
    - Portanto, k + 1 é a distância correta para i,
        - por ser o comprimento de um caminho mínimo até i.
- Ao final das iterações, temos que dist[ ] possui
    - o valor correto da distância de todas as cidades alcançáveis.
    - Se dist[i] = -1 então não existe caminho da origem até i.