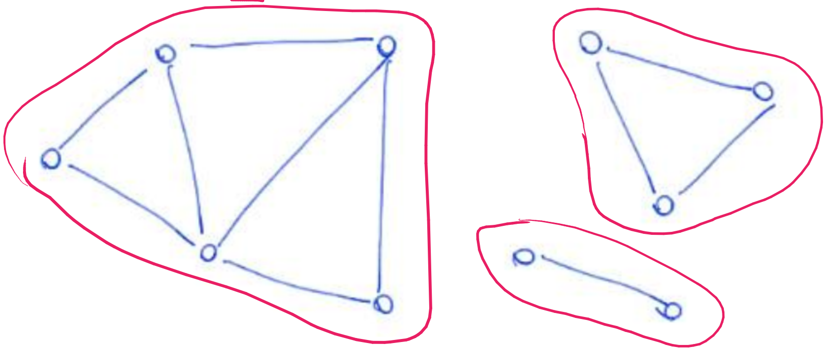
AED2 - Aula 24
Componentes fortemente conexos, algoritmo de Kosaraju

Em um grafo não orientado, um componente conexo

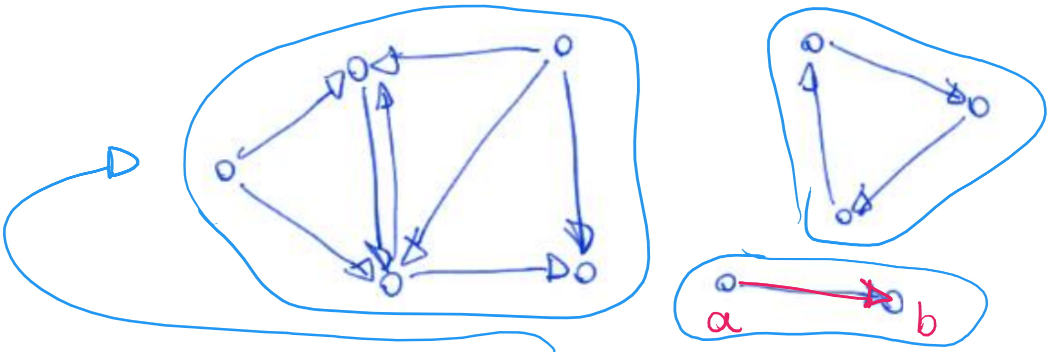
- é um conjunto de vértices maximal em que
  - entre qualquer par de vértices, existe um caminho.



- Numa intuição física, se imaginarmos o grafo construído com linhas,
  - um componente conexo é um objeto que não pode ser separado,
    - sem romper as "linhas" que unem os vértices.

Num grafo orientado (ou dirigido), por conta da orientação dos arcos,

- ao considerarmos um par de vértices qualquer a e b
  - é possível que haja caminho de a para b, mas não de b para a
- Por isso, o conceito de componente conexo ganha uma certa nuance.

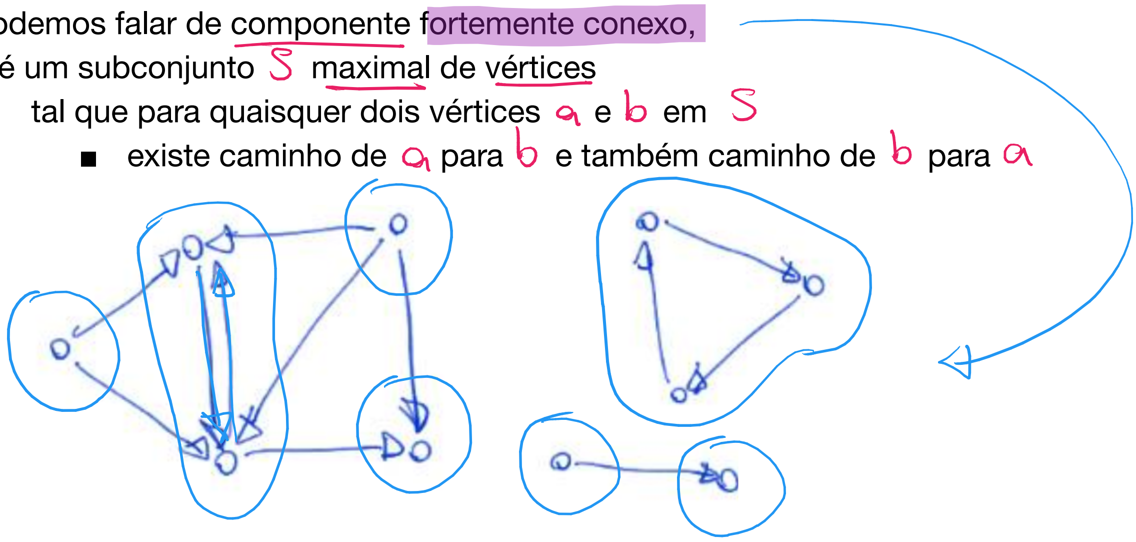


Podemos falar em componentes fracamente conexos, que correspondem

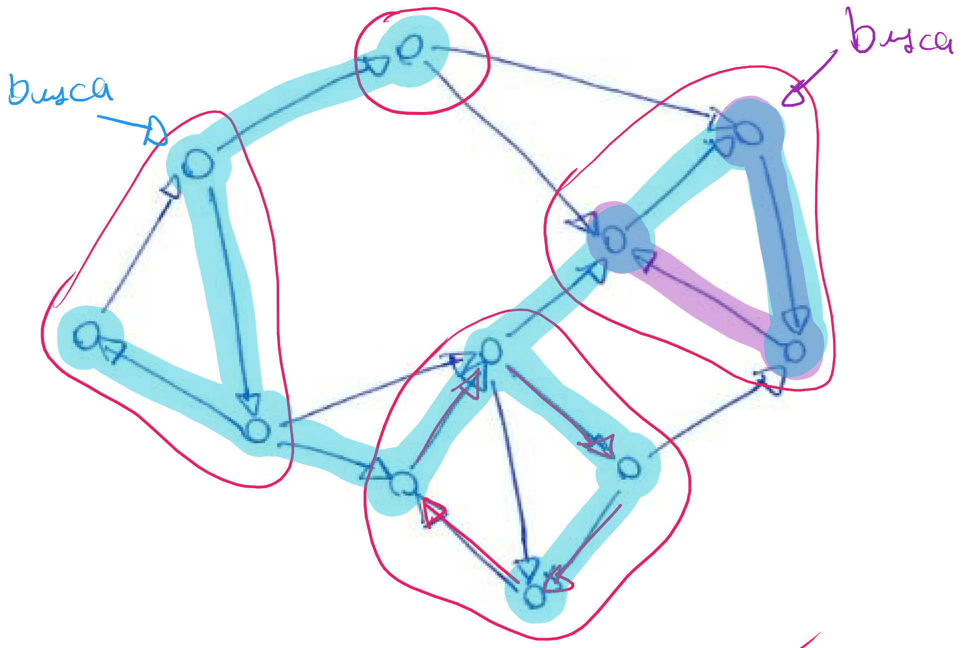
- aos componentes conexos que encontramos se
  - desconsideramos a orientação dos arcos e
    - tratarmos eles como arestas de um grafo não-orientado.

Também podemos falar de componente fortemente conexo,

- que é um subconjunto S maximal de vértices
  - tal que para quaisquer dois vértices a e b em S
    - existe caminho de a para b e também caminho de b para a

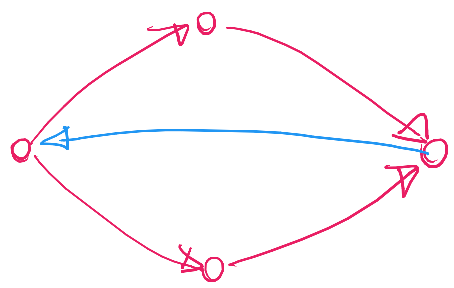


Para outro exemplo, considere o seguinte grafo dirigido



- Quais são seus componentes fortemente conexos?

- Podemos contrair cada componente em um único vértice, obtendo



- Note que, o grafo contraído é um DAG. Será coincidência?
    - Não, pois se houvesse algum ciclo no grafo resultante,
        - isso colapsaria os vários componentes do ciclo
    - em apenas um componente (e num único vértice no grafo contraído).

Para desenvolver nossa intuição sobre o problema e sobre como resolvê-lo,
- podemos realizar buscas no grafo anterior.

- Dependendo a partir de qual vértice começamos uma busca,
    - nós encontramos exatamente um componente fortemente conexo.
- Isso acontece se começarmos pelos vértices mais à direita.

No entanto, se começarmos de outros vértices, podemos encontrar
- vários componentes misturados, o que não nos ajuda.

- Por exemplo, isso acontece quando começamos pelos vértices à esquerda.

De modo geral, se começamos a busca a partir de uma componente sorvedouro,
- encontramos um componente fortemente conexo corretamente.

- Um componente fortemente conexo é sorvedouro se não tem arcos
    - indo dele para outros componentes fortemente conexos.
- Tal componente corresponde a um vértice sorvedouro no grafo contraído.

Como saber a partir de quais vértices começar a busca?

- Ou seja, como localizar um componente sorvedouro?

  L um vértice de

Para descobrir isso vamos usar alguns conceitos:

- Componente fonte - um componente fortemente conexo é fonte
  - se não tem arcos vindo de outros componentes para ele.
- Tempo de término de um vértice - corresponde ao momento em que
  - a busca termina de passar por esse vértice,
    - após explorar todos os vértices alcançáveis a partir dele.
  - Vimos isso na primeira aula de busca em profundidade.

Vamos ver/lembrar como usar a busca em profundidade

- para registrar o tempo de término dos vértices.

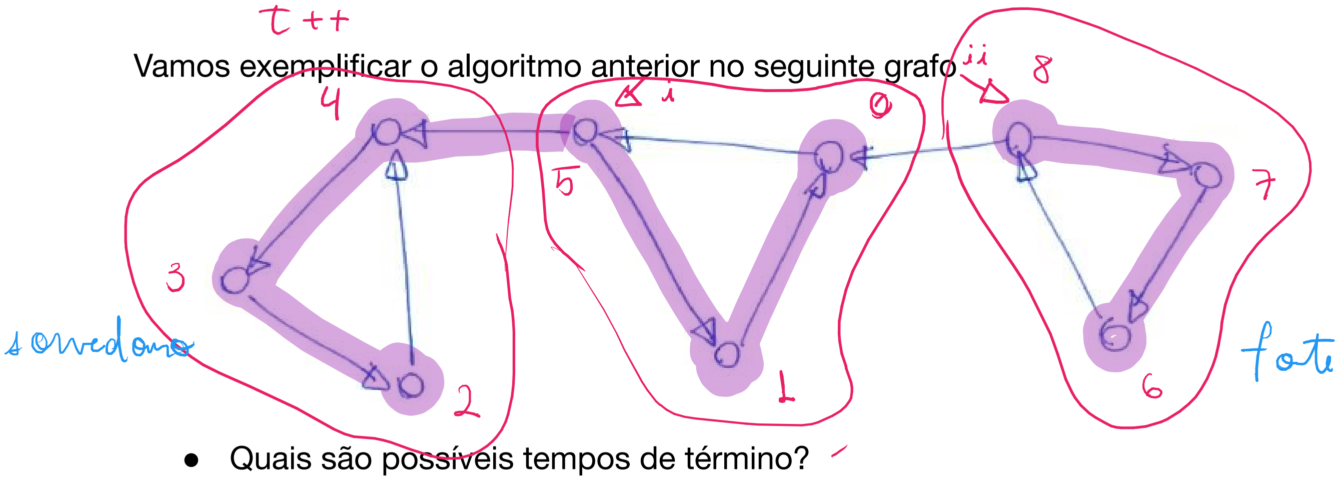
LoopBuscaProfTempoTerm(grafo G=(V,E)):

```
marque todos os vértices em V como não visitados
t = 0 — variável global
para cada v ∈ V:
    se v não foi visitado:
        buscaProfRecTT(G, v)
```

buscaProfRecTT(grafo G=(V,E), vértice v):

```
marque v como visitado
para cada arco (v, w)
    se w não foi visitado:
        buscaProfRecTT(G, w)
tempoTerm(v) = t
t++
```

Vamos exemplificar o algoritmo anterior no seguinte grafo



- Quais são possíveis tempos de término?
  - Quais são os componentes fortemente conexos do grafo anterior?

Quiz1: O que podemos dizer sobre o vértice com maior tempo de término?

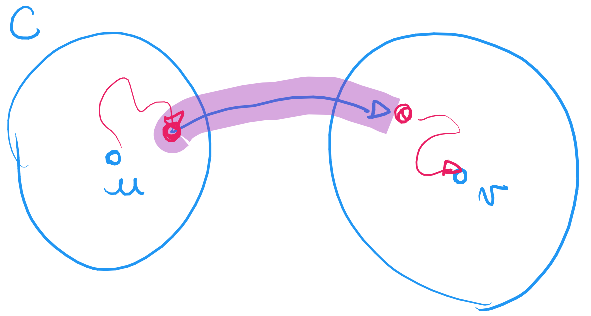
Do exemplo anterior, podemos inferir que, o vértice v com maior tempo de término

- está em uma componente fonte. De fato, isso é sempre verdade.

Prova por contradição: suponha que, embora v tenha o maior tempo de término,

  - ele não está em uma componente fonte.

- Neste caso, deve existir uma outra componente C
  - que tem arcos incidindo na componente de v



$t[v]$ é maior de todos

$t[v] > t[u]$

- Seja u o primeiro vértice de C a ser visitado.
  - Temos que, u alcança v, mas v não alcança u

Assim, temos duas possibilidades:

1. Se u foi visitado antes de v
   - então v será visitado antes que u seja finalizado,
     - o que leva a tempo de u maior que tempo de v (absurdo),
       - já que o tempo de término só cresce.
2. Se v foi visitado antes de u
   - então v será finalizado antes de u ser visitado,
     - pois não existe caminho de v para u
   - Novamente, como o tempo de término só cresce,
     - tempo de u será maior que o tempo de v (absurdo).

- Como chegamos a uma contradição nos dois casos,
  - concluímos a demonstração.

Uma observação importante: alguns exemplos podem nos levar a crer que

  - o menor tempo de término estará nos componentes sorvedouros.

- No entanto, não existe garantia de que isso ocorra,
  - pois os primeiros caminhos seguidos pela busca em profundidade
    - podem terminar em vértices de qualquer componente.

Código do loop da busca em profundidade para marcar tempos de término:

```
void loopBuscaProfTempoTerm(Grafo G, int *tempoTerm) {
    int v, tempo, *visitado;
    visitado = malloc(G->n * sizeof(int));
    // inicializa todos como não visitados e sem tempo de término
    for (v = 0; v < G->n; v++) {
        visitado[v] = 0;
        tempoTerm[v] = -1;
    }
    tempo = 0;
    // inicia busca em prof. a partir de cada vértice não visitado
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        if (visitado[v] == 0)
            buscaProfTempoTermR(G, v, visitado, tempoTerm, &tempo);
    free(visitado);
}

void buscaProfTempoTermR(Grafo G, int v, int *visitado,
             int *tempoTerm, int *ptempo) {
    int w;
    Noh *p;
    visitado[v] = 1; // marca v como visitado
    p = G->A[v]; // para cada vizinho não visitado de v
    while (p != NULL) {
        w = p->rotulo;
        if (visitado[w] == 0)
            buscaProfTempoTermR(G, w, visitado, tempoTerm, ptempo);
        p = p->prox;
    }
    tempoTerm[*ptempo] = v; // o vetor é indexado pelos tempos
    (*ptempo)++;
}
```

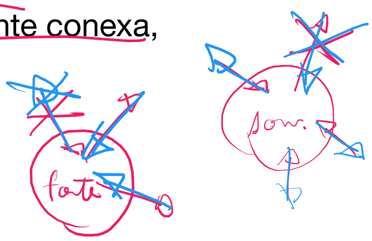
Um detalhe importante é que, este algoritmo armazena os tempos

- usando um vetor indexado por tempo de término,
    - cujos conteúdos são os rótulos dos vértices.
- Isso é mais eficiente que armazenar um vetor indexado por vértices,
    - cujos conteúdos são tempos de término,
        - pois quando o próximo algoritmo for usar tais tempos,
            - o vetor não precisa ser ordenado.
- Uma curiosidade é que, o que o algoritmo faz
    - é equivalente a empilhar os vértices conforme eles são finalizados,
        - e na segunda passada ir desempilhando para visitá-los.

Voltando ao nosso problema de detectar componentes fortemente conexos.

- Nosso interesse era encontrar vértices
  - que estão em componentes sorvedouros.
- Isso porque, uma busca a partir de um vértice de um sorvedouro,
  - encontra todos os vértices de uma componente fortemente conexa,
    - e nenhum a mais.
- No entanto, acabamos de analisar e implementar um algoritmo
  - para encontrar vértices de componentes fontes.
- Como isso nos ajuda a resolver nosso problema?

Grafo Reverso



Para resolvê-lo, vamos começar invertendo a orientação dos arcos

- Só então vamos realizar o loop da busca em profundidade,
  - para registrar os tempos de término.
- Isso porque, um componente fonte no grafo invertido
  - é um componente sorvedouro no grafo original, e vice-versa.
- Note que, inverter os arcos não altera quais vértices pertencem
  - a cada componente fortemente conexo. Quiz2: Por que?

Algoritmo de Duas Passadas de Kosaraju

1. Computa Grev invertendo todos os arcos de G.
2. Roda LoopBuscaProfTempoTerm(Grev) para computar tempos de término,
   - que permitirão localizar vértices de componentes sorvedouros.
3. Executa LoopBuscaProfIdentComp(G), começando cada busca por
   - um vértice não visitado em ordem decrescente de tempo de término e
   - marcando vértices visitados em cada busca com um rótulo distinto.

Código da função principal do algoritmo de Kosaraju:

```
void identCompForteConexo(Grafo G, int *comp) {
    int u, v, *tempoTermino;
    Noh *p;
    Grafo Grev = inicializaGrafo(G->n);
    for (u = 0; u < G->n; u++) { // reverte os arcos do grafo G
        p = G->A[u];
        while (p != NULL) {
            v = p->rotulo;
            insereArcoGrafo(Grev, v, u);
            p = p->prox;
        }
    }
    tempoTermino = malloc(G->n * sizeof(int));
    loopBuscaProfTempoTerm(Grev, tempoTermino);
    Grev = liberaGrafo(Grev);
    loopBuscaProfIdentComp(G, tempoTermino, comp);
    free(tempoTermino);
}
```

O(n+m)

O(n+m)

O(n+m)

Eficiência: Este algoritmo executa em tempo $O(n+m)$. Vale destacar que,

- para tanto é necessário representar o grafo com listas de adjacência,
  - e armazenar os vértices em ordem decrescente de tempo de término.
- Quiz3: qual a eficiência de espaço do algoritmo?

Faltou detalharmos os pseudocódigos do passo 3 do algoritmo:

LoopBuscaProfIdentComp(grafo G=(V,E)):

rótulo ou cor

```
marque todos os vértices v ∈ V como ñ visitado
r = 0
// supor vértices ordenados em ordem decrescente de tempo de término
para v = n até 1:
    se v não foi visitado:
        r++
        buscaProfRecIdentComp(G, v)
```

buscaProfRecIdentComp(grafo G=(V,E), vértice v):

```
marque v como visitado
comp(v) = r
para cada arco (v, w):
    se w não foi visitado:
        buscaProfRecIdentComp(G, w)
```

Código do loop da busca em profundidade para identificar os componentes:

```
void loopBuscaProfIdentComp(Grafo G, int *tempoTermino, int *comp) {
    int v, i, num_comp;
    // inicializa todos como não visitados e sem componente
    for (v = 0; v < G->n; v++) comp[v] = -1;
    num_comp = 0;
    // inicia buscas a partir de vértices não visitados
    // seguindo a ordem decrescente dos tempos de término
    for (i = G->n - 1; i >= 0; i--) {
        v = tempoTermino[i];
        if (comp[v] == -1) {
            num_comp++;
            buscaProfIdentCompR(G, v, comp, num_comp);
        }
    }
}
```

- Quiz4: por que na busca para calcular tempos de término usamos o vetor visitado? Como podemos evitar utilizá-lo?

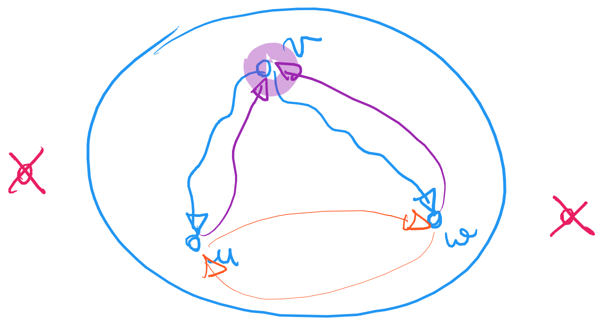
```
void buscaProfIdentCompR(Grafo G, int v, int *comp, int num_comp) {
    int w;
    Noh *p;
    comp[v] = num_comp; // coloca v no componente atual
    // para cada vizinho de v que ainda não foi visitado
    p = G->A[v];
    while (p != NULL) {
        w = p->rotulo;
        if (comp[w] == -1)
            buscaProfIdentCompR(G, w, comp, num_comp);
        p = p->prox;
    }
}
```

Agora vamos mostrar que o algoritmo está correto, ou seja,

- que a busca a partir de um vértice v com maior tempo de término
    - realmente revela um componente fortemente conexo.
- Para tanto, lembre que num componente fortemente conexo
    - todo par de vértices tem caminho indo e voltando.

Sendo v a origem de uma busca no passo 3, existe um caminho a partir de
- até qualquer vértice w que a busca encontrou (pela prop. da busca).

- Então, só precisamos mostrar que
    - existe um caminho de um vértice w qualquer até v



- Isso porque, pela transitividade (decorrente da concatenação de caminhos)
    - isso implica que existe caminho nos dois sentidos
        - entre qualquer par de vértices localizado na busca,
- o que implica que temos uma componente fortemente conexa.

Assim, tome um vértice w qualquer que foi alcançado a partir de v
- Queremos mostrar que existe um caminho a partir de w até v em G.

$(\exists\ w \rightsquigarrow v$ em $G)$?

Sabemos que em G o vértice v alcança w ⇒ $\exists\ v \rightsquigarrow w$ em G
- portanto em Grev existe um caminho de w até v

↳ $\exists\ w \rightsquigarrow v$ em G_{rev}

Além disso, o tempo de término de v é maior que o tempo de término de w

- i.e., $t[v] > t[w]$

- Vamos analisar as possibilidades para que isso ocorra.

Primeiro, vamos determinar qual vértice entre v e w

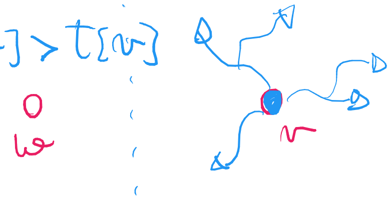
- foi visitado antes no passo 2 do algoritmo,
  - em que as buscas ocorrem em G_{rev}

Caso 1: Suponha que w foi visitado antes que v em Grev.

- Neste caso, o tempo de término de w
  - seria maior que de v
- i.e., $t[w] > t[v]$, já que
  - existe o caminho de w até v em Grev.
- Portanto, o caso 1 não pode ter ocorrido.

Caso 2: Consideramos que v foi visitado antes que w

- Caso 2.1: Supomos que não há caminho de v
    - até w em G_{rev}
  - Neste caso, v será finalizado
    - antes de w ser visitado e
  - quando w for finalizado receberá
    - tempo de término maior que v
      - i.e., $t[w] > t[v]$
  - Portanto, o caso 2.1 também não pode ter ocorrido.
- Caso 2.2: Assim, só resta o caso em que há caminho de v até w em G_{rev}
  - para que seja possível



$\hookrightarrow \exists\, v \rightsquigarrow w$ em G_{rev}

Note que, isso implica na existência de um caminho

- de w até v em G
- que é o que queríamos demonstrar.

$\exists\, w \rightsquigarrow v$ em G

Quiz5: O que acontece se no passo 3 do algoritmo

- trocarmos a busca em profundidade que identifica os componentes
  - por uma busca genérica?
- Dica: alguma propriedade específica da busca em profundidade é usada?

Quiz6: O que acontece se fizermos o passo 2 do algoritmo no grafo original,

- e o passo 3 no grafo invertido?
  - O algoritmo ainda funciona?
- Dica: neste caso os tempos de término
  - vão identificar vértices de componentes fonte,
- mas o que serão esses componentes durante a busca em Grev?