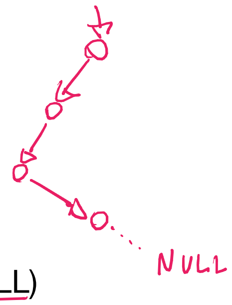
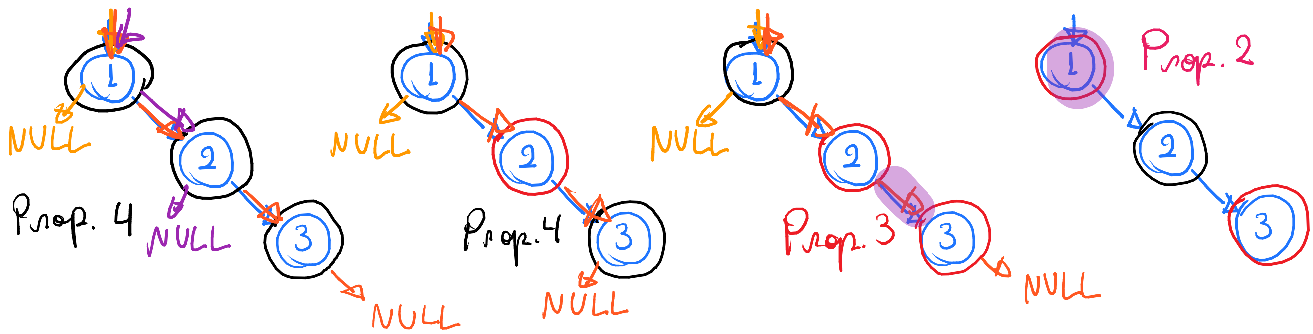
# AED2 - Aula 05
## Árvores rubro-negras

Árvores rubro-negras são árvores binárias de busca balanceadas,
- que usam rotações mas não usam fator de balanceamento.

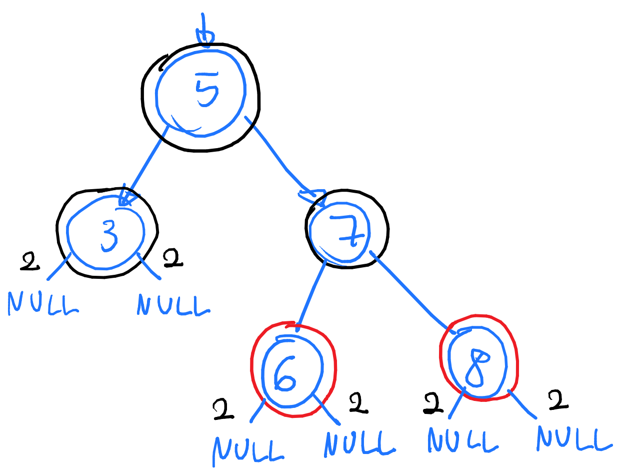
Definição:
1. Cada nó é vermelho ou preto.
2. Raiz é sempre preta.
3. Dois nós vermelhos não podem ser adjacentes,
   - ou seja, um nó vermelho só pode ter filhos pretos.
4. Todo caminho da raiz até um apontador NULL (caminho raiz-NULL)
   - tem o mesmo número de nós pretos.
     - Pense nesses caminhos como buscas mal sucedidas.

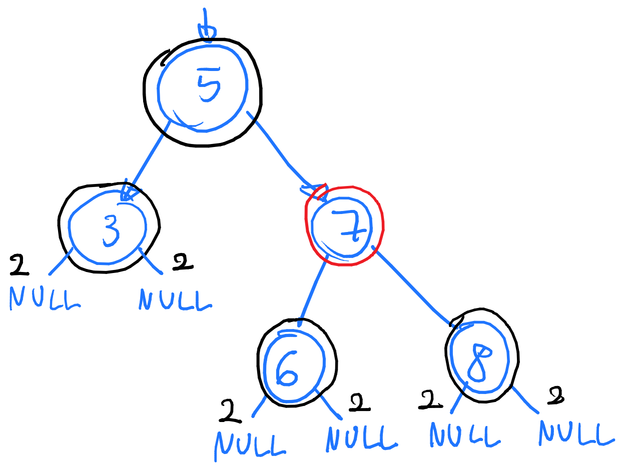



Para ganhar intuição de que essas propriedades levam a uma árvore balanceada
- note que uma lista com três nós já não pode ser uma árvore rubro-negra.

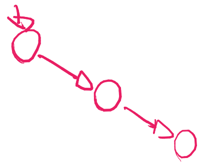



Exemplos de árvores rubro-negras:



## Altura máxima de árvores rubro-negras



Lembre que a altura de uma → # de arestas árvore é igual

- ○ ao comprimento do maior caminho raiz-NULL.
- Assim, queremos limitar superiormente o comprimento de qualquer caminho.

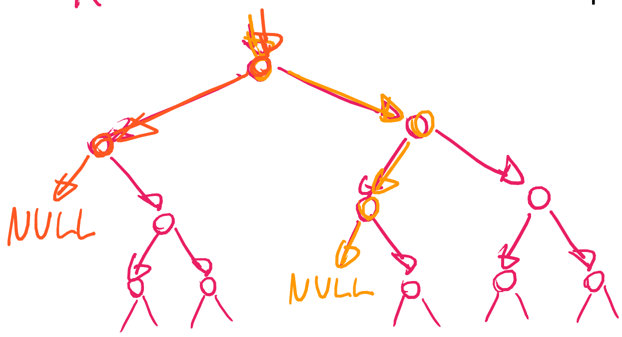
Observe que, se todo caminho raiz-NULL de uma árvore tem pelo menos $K$ nós,

- então os primeiros $K$ níveis da árvore devem estar completos.

$a \Rightarrow b$

contra-positivo

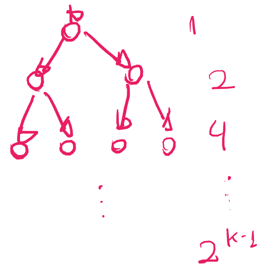
$\sim b \Rightarrow \sim a$




$K = 4$

Caso contrário, haveria um caminho da raiz até o nó ausente, resultando

- ○ em um caminho raiz-NULL de comprimento menor que $K-1$
- lembrando que comprimento de um caminho $P$ é $|V(P)| - 1$




Supondo que os primeiros $K$ níveis da árvore estão completos,

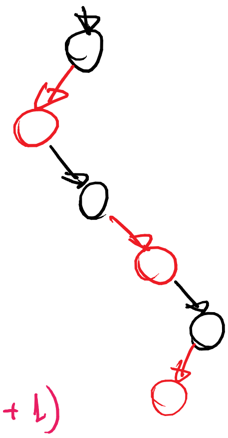
- o número de nós $n$ desta árvore é maior ou igual que
  - ○ o número de nós numa árvore binária completa de altura $K-1$
    - ■ ou seja, $n \geq 2^K - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{K-1}$
- Portanto, $2^K \leq n+1 \Rightarrow K \leq \lg(n+1)$

Note que, numa árvore rubro-negra, pela propriedade 4 da definição,

- todo caminho raiz-NULL tem um mesmo número de nós pretos.
  - ○ Digamos que este número é $K$
- Assim, só os nós pretos já preenchem os primeiros $K$ níveis da árvore.

Desta observação, temos um limitante superior para o número de nós pretos

- ○ em qualquer caminho raiz-NULL, i.e., $K \leq \lg(n+1)$
- No entanto, queremos um limitante para o número total de nós
  - ○ em qualquer caminho, já que isso limita a altura da árvore.



Pelas propriedades 2 e 3 da definição, todo caminho tem no máximo

- um nó vermelho para cada nó preto,
  - ○ já que os caminhos começam na raiz, que é preta,
- e não são permitidos dois nós vermelhos consecutivos.

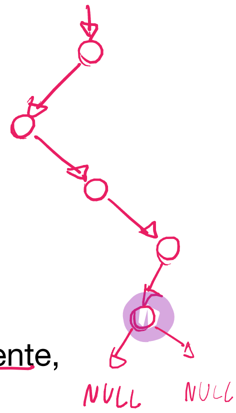
Assim, o número total de nós em qualquer caminho raiz-NULL da árvore é

- no máximo 2 vezes o número de nós pretos $= 2K \leq 2\lg(n+1)$

Como a altura da árvore é igual ao comprimento do maior caminho raiz-NULL,

- e o comprimento de um caminho é menor que o seu número de nós,
  - ○ o resultado segue.

## Inserção em árvores rubro-negras

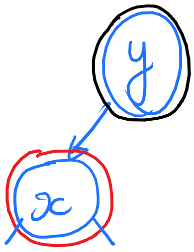



A ideia geral é inserir o novo nó como uma folha vermelha,

- após percorrer um caminho descendente na árvore,

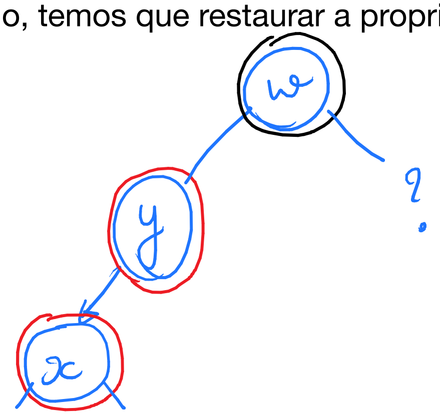
- e usar recolorações e rotações para restabelecer as propriedades,
    - ao percorrer o caminho no sentido ascendente.
- A seguir vamos analisar alguns casos que podem ocorrer,
    - na volta da recursão, quando percorremos o caminho ascendente,
        - sempre considerando que o nó corrente é $x$

Caso 1: se $y$, o pai de $x$, não for vermelho,




- as propriedades da definição estão mantidas e nada precisa ser feito.

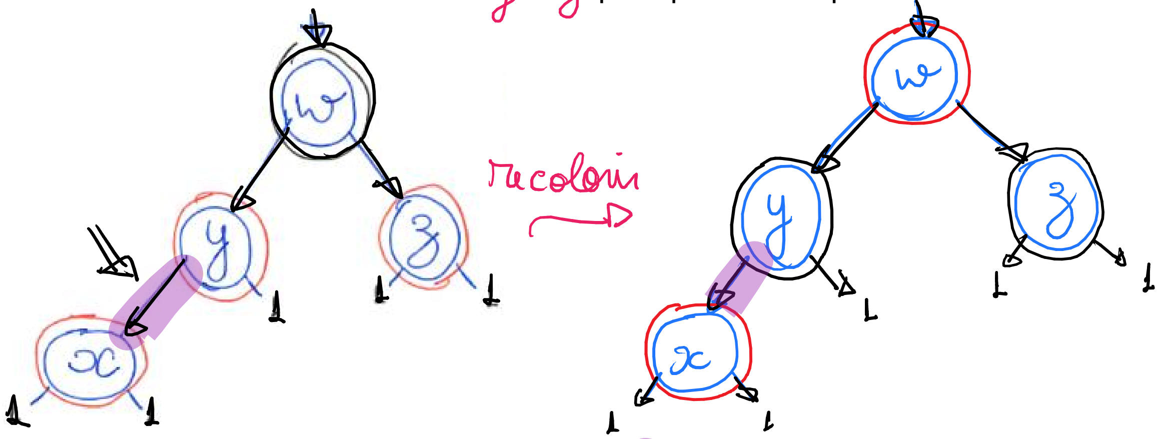
Caso 2: se $y$ é vermelho, temos que restaurar a propriedade 3.




- Sabemos que $y$ não é a raiz, por conta da propriedade 2,
    - e que $w$, o pai de $y$, é preto, por conta da propriedade 3.

Caso 2.1: $w$ tem outro filho $z$ que tem cor vermelha.

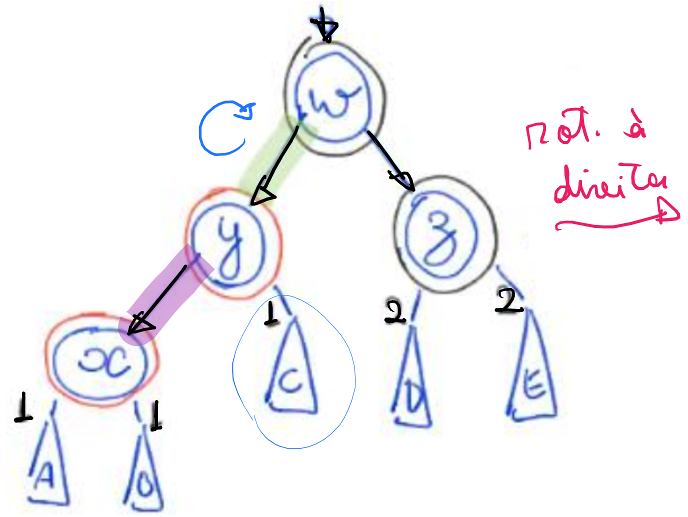
- Neste caso vamos recolorir $y$ e $z$ para preto e $w$ para vermelho.

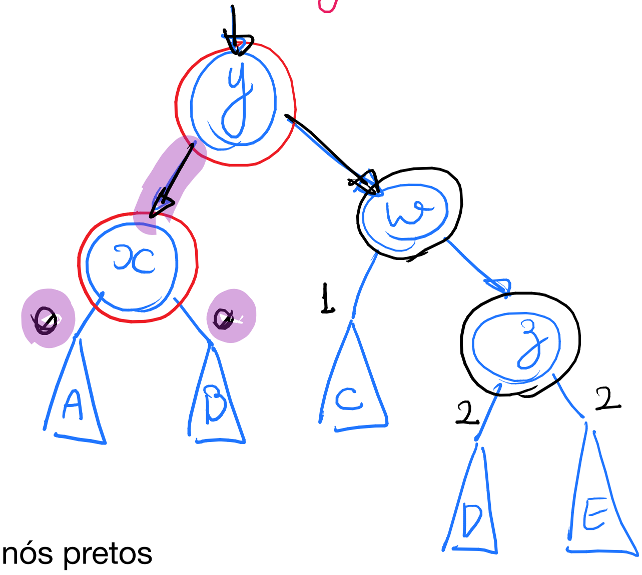



- Note que preservamos a propriedade 4, pois
    - todo caminho que passava por $w$ passa por $y$ ou por $z$
        - e restauramos a propriedade 3 entre $x$ e $y$
- Ao continuar a subida na árvore, será necessário analisar a situação de $w$
    - que ficou vermelho, pois ele pode violar a propriedade 3.
- Se $w$ for a raiz da árvore, basta mudar a cor dele para preto.
    - Quiz1: Por que isso não viola as propriedades?

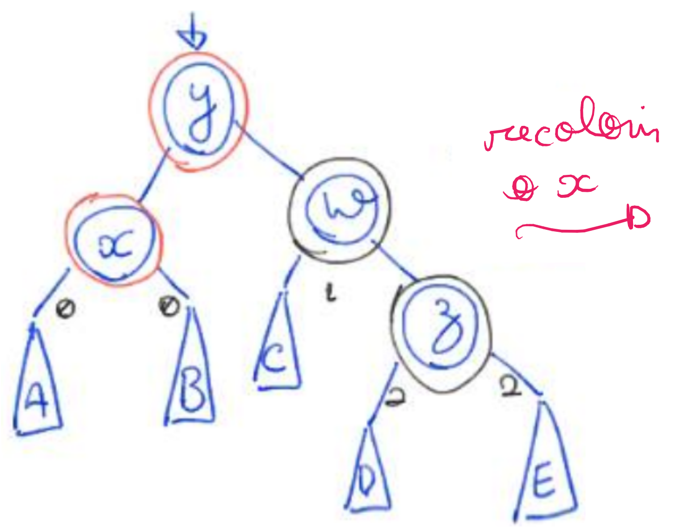
Caso 2.2: $w$ não tem outro filho vermelho.

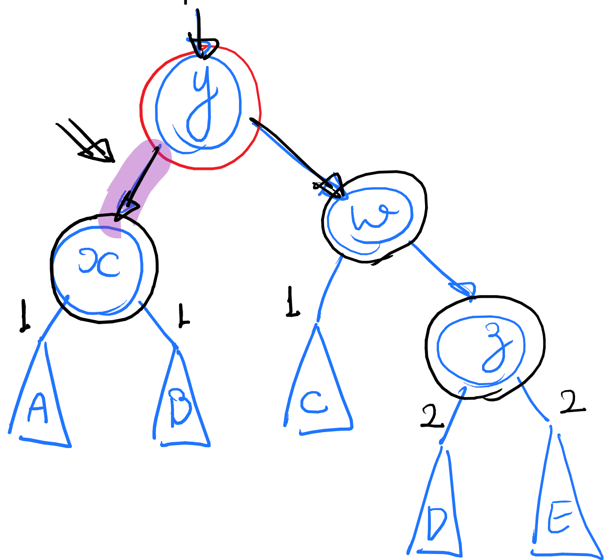
- Neste caso, $w$ pode ter outro filho preto ou não ter outro filho.
  - Primeiro, vamos considerar a presença de um nó preto $z$
- Fazemos uma rotação à direita que inverte a relação entre $w$ e $y$



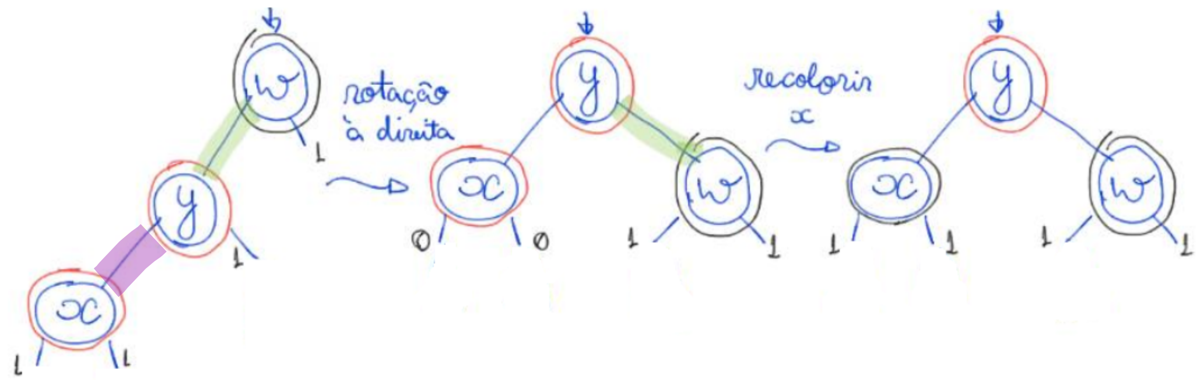



- Note que, esta rotação reduz o número de nós pretos
  - nos caminhos que vão da raiz até os filhos de $x$
- Então mudamos a cor de $x$ para preto, o que resolve tanto o problema
  - dos vermelhos adjacentes quanto do número de pretos nos caminhos.



- Ao continuar a subida na árvore, será necessário analisar a situação de $y$
  - que é vermelho e se tornou a raiz da subárvore,
    - pois ele pode violar a propriedade 3 com relação a seu pai.
  - Se $y$ for a nova raiz da árvore, basta mudar a cor dele para preto.
- Note que, se $w$ não tiver outro filho, a mesma solução funciona.




Quiz2: Como resolver o caso em que $x$ é ~~inserido como~~ filho direito de $y$ ?

**Inserção em árvores rubro-negras esquerdistas**

Embora nossos tratamentos dos casos anteriores estejam corretos,

- uma vez que eles restauram as propriedades da árvore rubro-negra,
    - sua implementação é um tanto complicada,
        - por ser necessário manipular antecessores do nó corrente.
- Por isso, vamos estudar a implementação da inserção
    - de um tipo especial de árvore rubro-negra,
- que é conhecida como árvore rubro-negra esquerdista,
    - pois os nós vermelhos sempre são filhos esquerdos.

A seguir o código para a estrutura de um nó de árvore rubro-negra:

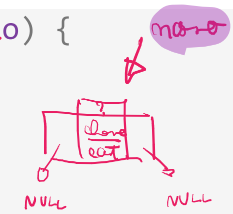
```
typedef int Item;
typedef int Chave;

typedef struct noh {
   int vermelho;
   Chave chave;
   Item conteudo;
   struct noh *pai;
   struct noh *esq;
   struct noh *dir;
} Noh;

typedef Noh *Arvore;
```

A seguir apresentamos a implementação recursiva,

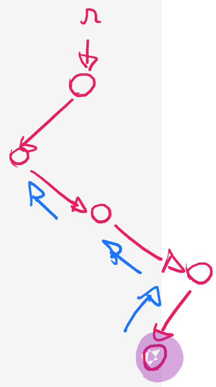
- introduzida por Sedgewick, de uma árvore rubro-negra esquerdista.

```
Noh *novoNoh(Chave chave, Item conteudo) {
   Noh *novo;
   novo = (Noh *)malloc(sizeof(Noh));
   novo->vermelho = 1;
   novo->chave = chave;
   novo->conteudo = conteudo;
   novo->esq = NULL;
   novo->dir = NULL;
   return novo;
}
```

```
Arvore inserir(Arvore r, Chave chave, Item conteudo) {
    Noh *novo = novoNoh(chave, conteudo);
    return insereRN(r, novo);
}
```

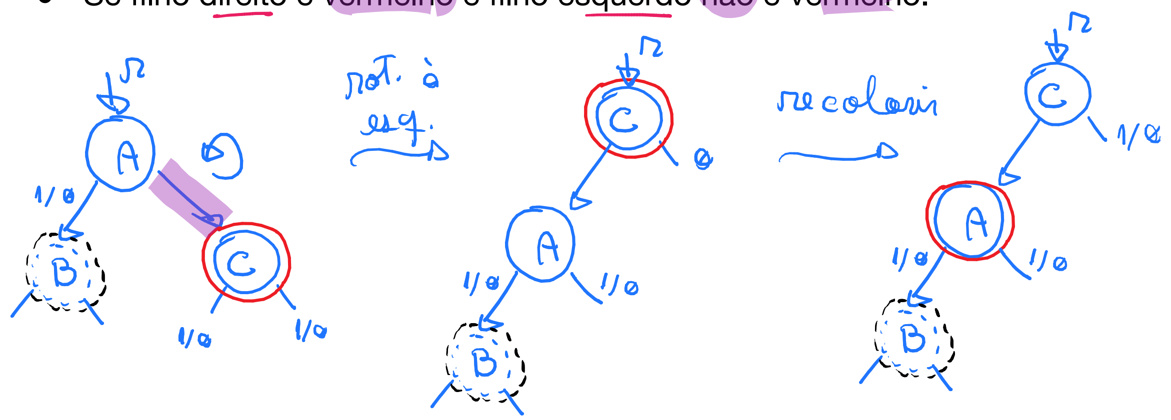



```
Arvore insereRN(Noh *r, Noh *novo) {
    if (r == NULL) { // subárvore era vazia
        novo->pai = NULL;
        return novo;
    }
    if (novo->chave <= r->chave) { // desce à esquerda
        r->esq = insereRN(r->esq, novo);
        r->esq->pai = r;
    }
    else { // desce à direita
        r->dir = insereRN(r->dir, novo);
        r->dir->pai = r;
    }
```




Estamos na volta da recursão (caminho ascendente) e vamos tratar alguns casos:

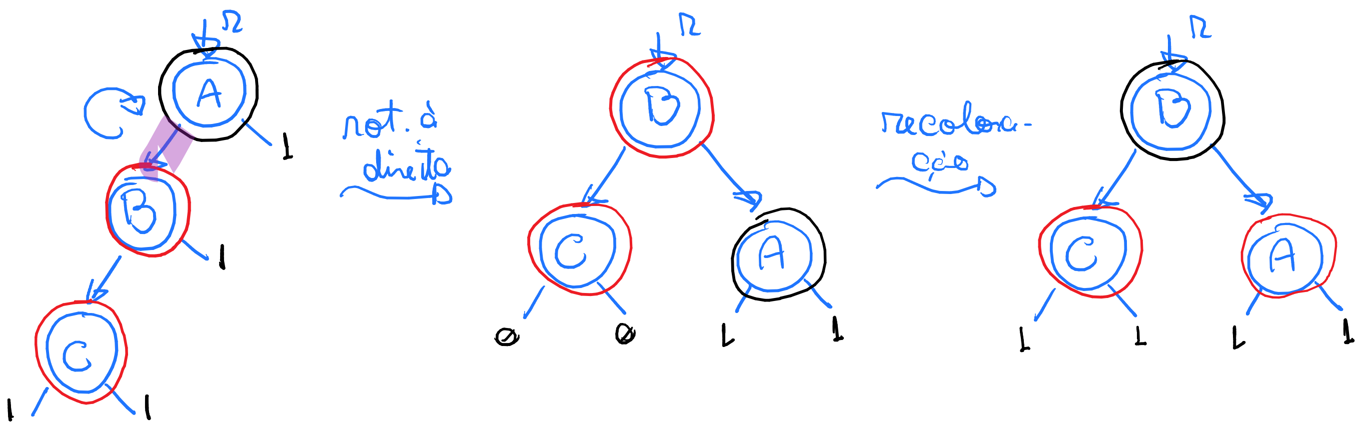
- Se filho direito é vermelho e filho esquerdo não é vermelho.




    - Note que A pode ser preto ou vermelho,
        - e que sua cor é herdada por C.

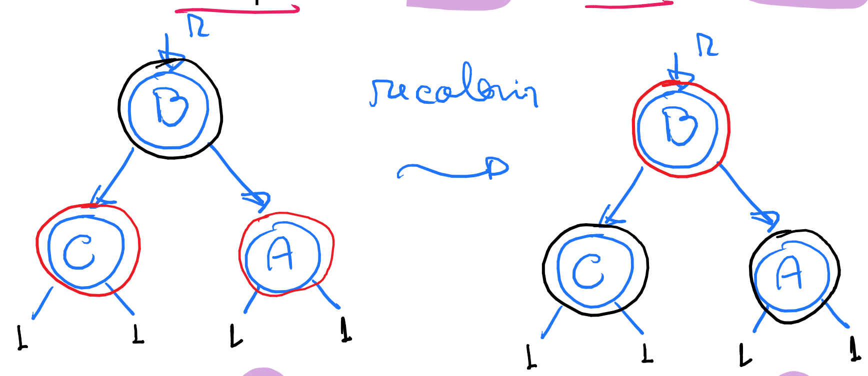
```
    if (r->dir != NULL && r->dir->vermelho == 1 && (r->esq == NULL ||
r->esq->vermelho == 0)) {
        r = rotacaoEsq(r);
        r->vermelho = r->esq->vermelho;
        r->esq->vermelho = 1;
    }
```

- Se filho esquerdo é vermelho e filho esquerdo do filho esquerdo é vermelho.




```
   if (r->esq != NULL && r->esq->vermelho == 1 && r->esq->esq !=
NULL && r->esq->esq->vermelho == 1) {
        // se filho e neto esquerdos forem vermelhos faz rotação a
direita e recolore de acordo
        r = rotacaoDir(r);
        r->vermelho = 0;
        r->dir->vermelho = 1;
   }
```

- Se filho esquerdo é vermelho e filho direito é vermelho.




```
   if (r->esq != NULL && r->esq->vermelho == 1 && r->dir != NULL &&
r->dir->vermelho == 1) {
        // se os dois filhos são vermelhos, troque a cor com o pai
preto
        r->esq->vermelho = 0;
        r->dir->vermelho = 0;
        r->vermelho = 1;
   }
   return r;
}
```

É interessante analisar como as operações anteriores

- garantem tanto as propriedades tradicionais das árvores rubro-negras,
    - quanto a propriedade adicional da árvore rubro-negra esquerdista,
        - i.e., os nós vermelhos sempre são filhos esquerdos.