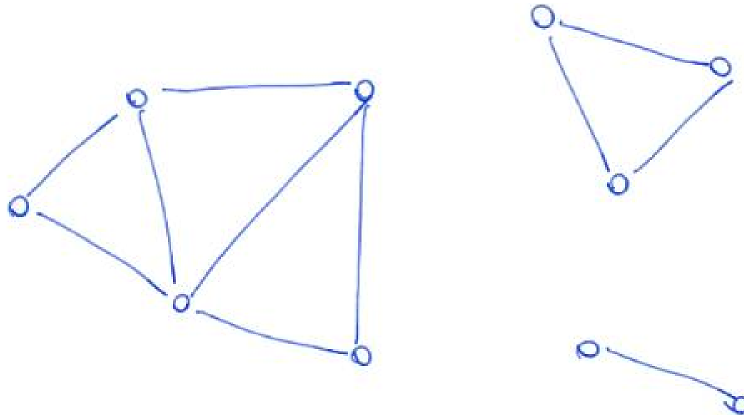
AED2 - Aula 24

Componentes fortemente conexos, algoritmo de Kosaraju

Em um grafo não orientado, um componente conexo

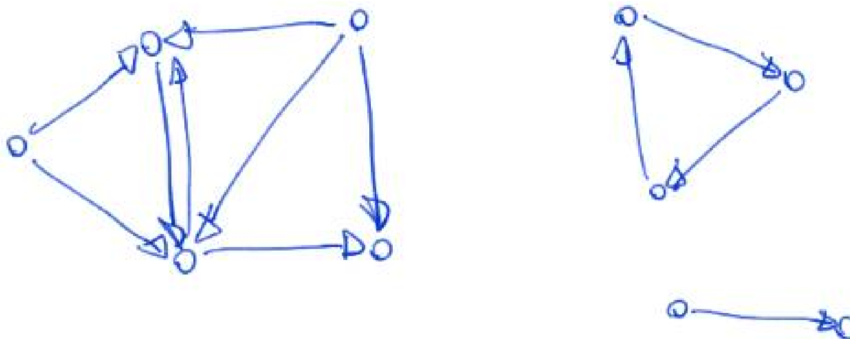
- é um conjunto de vértices maximal em que
  - entre qualquer par de vértices, existe um caminho.



- Numa intuição física, se imaginarmos o grafo construído com linhas,
  - um componente conexo é um objeto que não pode ser separado,
    - sem romper as "linhas" que unem os vértices.

Num grafo orientado (ou dirigido), por conta da orientação dos arcos,

- ao considerarmos um par de vértices qualquer a e b,
  - é possível que haja caminho de a para b, mas não de b para a.
- Por isso, o conceito de componente conexo ganha uma certa nuance.



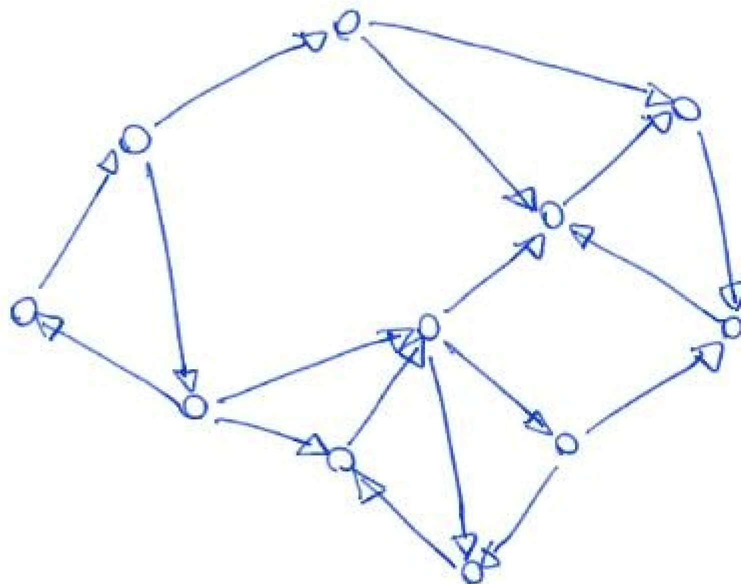
Podemos falar em componentes fracamente conexos, que correspondem

- aos componentes conexos que encontramos se
  - desconsideramos a orientação dos arcos e
    - tratarmos eles como arestas de um grafo não-orientado.

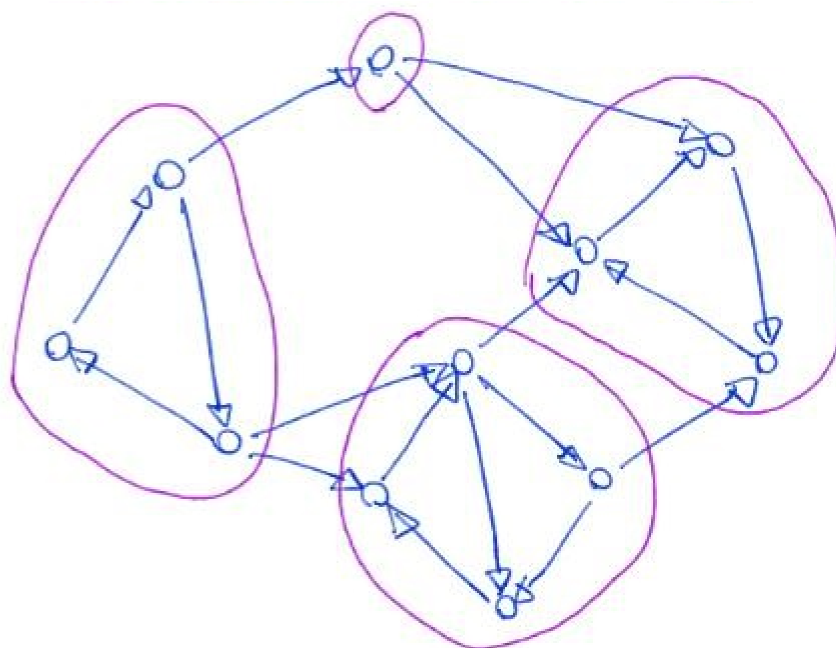
Também podemos falar de componente fortemente conexo,

- que é um subconjunto S maximal de vértices
  - tal que para quaisquer dois vértices u e v em S
    - existe caminho de u pra v e também caminho de v para u.

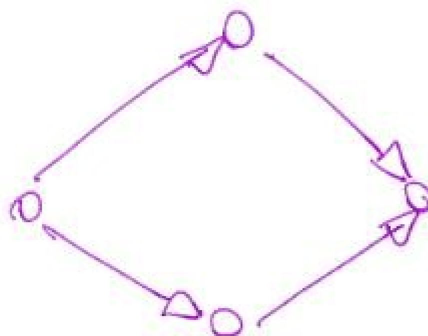
Como exemplo, considere o seguinte grafo dirigido



- Seus componentes fortemente conexos são



- Podemos contrair cada componente em um único vértice, obtendo



- Note que, o grafo resultante é um DAG. Será coincidência?
    - Não, pois se houvesse algum ciclo no grafo resultante,
        - isso colapsaria os vários componentes do ciclo
            - em apenas um componente
                - (e num único vértice no grafo contraído).

Para desenvolver nossa intuição sobre o problema e sobre como resolvê-lo,
    - podemos realizar buscas no grafo anterior.
- Dependendo a partir de qual vértice começamos uma busca,
    - nós encontramos exatamente um componente fortemente conexo.
        - Isso acontece se começarmos pelos vértices mais à direita.

No entanto, se começarmos de outros vértices,
- podemos acabar encontrando vários componentes misturados,
    - o que não nos ajuda.
- Por exemplo, isso acontece quando começamos pelos vértices à esquerda.

De modo geral, se começamos a busca a partir de uma componente sorvedouro,
- encontramos um componente fortemente conexo corretamente.

Um componente fortemente conexo é sorvedouro se
- não tem arcos indo dele para outros componentes fortemente conexos.
    - Note que, tal componente corresponderá a um vértice sorvedouro
        - no grafo contraído.

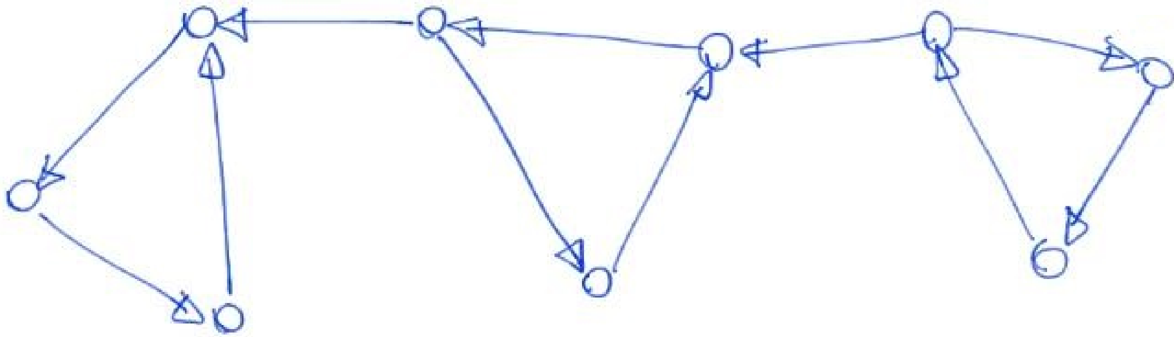
Como saber a partir de quais vértices começar a busca?
- Ou seja, como localizar um componente sorvedouro?

Para descobrir isso vamos usar alguns conceitos:
- Componente fonte - um componente fortemente conexo é fonte
    - se não tem arcos vindo de outros componentes para ele.
- Tempo de término de um vértice - corresponde ao momento em que
    - a busca termina de passar por esse vértice,
        - após explorar todos os vértices alcançáveis a partir dele.
- Vimos isso na primeira aula de busca em profundidade.

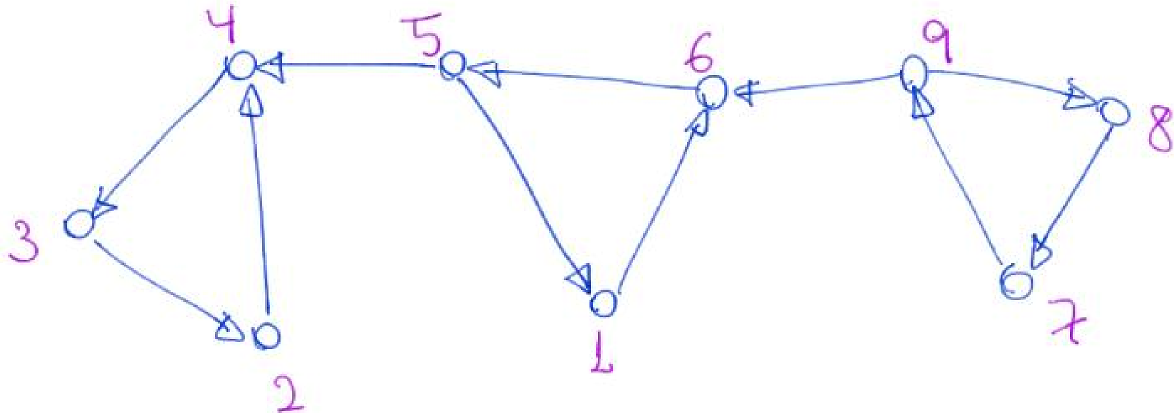
Vamos ver/lembrar como usar a busca em profundidade
- para registrar o tempo de término dos vértices.

```
LoopBuscaProfTempoTerm(grafo G=(V,E))
        marque todos os vértices em V como não visitados
        t = 0
        para cada v \in V
                se v não foi visitado
                        buscaProfRecTT(G, v)



buscaProfRecTT(grafo G=(V,E), vértice v)
        marque v como visitado
        para cada arco (v, w)
                se w não foi visitado
                        buscaProfRecTT(G, w)
        t++
        tempoTerm(v) = t
```

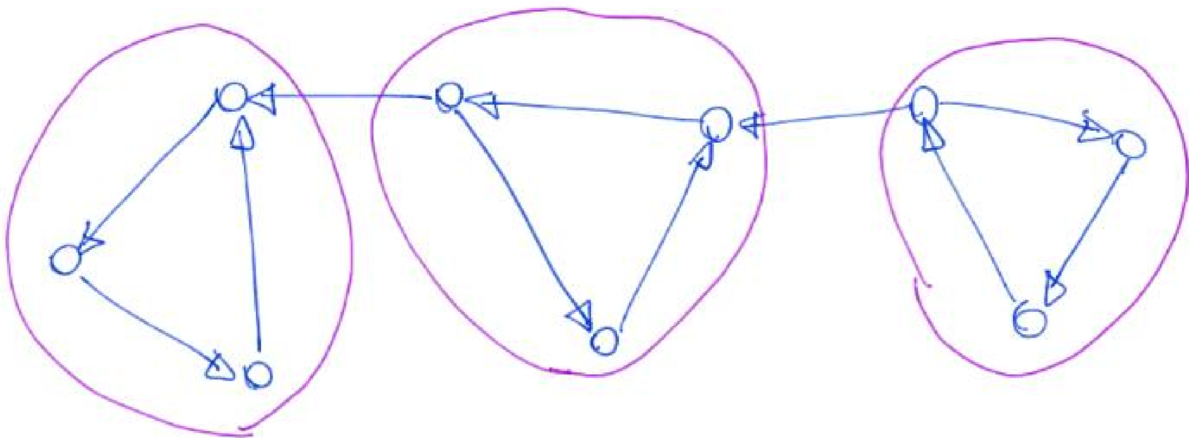
Vamos exemplificar o algoritmo anterior no seguinte grafo



- Possíveis tempos de término são



- Os componentes fortemente conexos do grafo anterior são

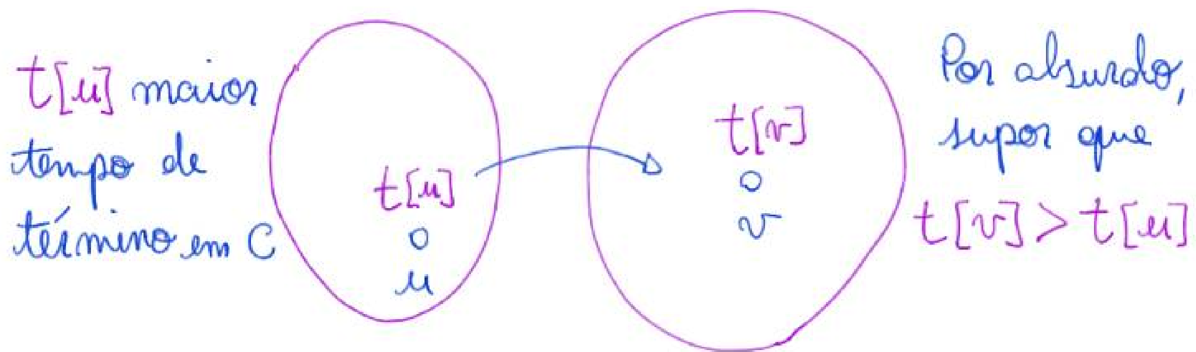


Do exemplo anterior, podemos inferir que,

- o vértice v com maior tempo de término
    - está em uma componente fonte.

De fato, isso é sempre verdade. Provando por contradição:

- Suponha que, embora v tenha o maior tempo de término,
    - ele não está em um componente fonte.
- Neste caso, deve existir uma outra componente C
    - que tem arcos incidindo na componente de v.
- Sendo u o primeiro vértice de C a ser visitado,
    - temos que u alcança v, mas v não alcança u.



Daí temos duas possibilidades:

1. Se u foi visitado antes de v,
    - então v será visitado antes que u seja finalizado,
        - o que leva a tempo de u maior que tempo de v (absurdo),
            - já que o tempo de término só cresce.
2. Se v foi visitado antes de u,
    - então v seria finalizado antes de u ser visitado,
        - pois não existe caminho de v para u.
    - Novamente, como o tempo de término só cresce,
        - tempo de u será maior que o tempo de v (absurdo).

- Como chegamos a uma contradição nos dois casos,
    - concluímos a demonstração.

Uma observação importante, alguns exemplos podem nos levar a crer

- que o menor tempo de término estará nos componentes sorvedouros.
- No entanto, não existe garantia de que isso ocorra,
    - pois os primeiros caminhos seguidos pela busca em profundidade
        - podem terminar em vértices de qualquer componente.

Código do loop da busca em profundidade para marcar tempos de término:

```
void loopBuscaProfTempoTerm(Grafo G, int *tempoTermino) {
    int v, tempo, *visitado;
    visitado = malloc(G->n * sizeof(int));
    // inicializa todos como não visitados e sem tempo de término
    for (v = 0; v < G->n; v++) {
        visitado[v] = 0;
        tempoTermino[v] = -1;
    }
    tempo = 0;
    // inicia uma busca em profundidade a partir de cada vértice não
visitado
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        if (visitado[v] == 0)
            buscaProfTempoTermR(G, v, visitado, tempoTermino,
&tempo);
    free(visitado);
}
```

```
void buscaProfTempoTermR(Grafo G, int v, int *visitado,
            int *tempoTermino, int *ptempo) {
    int w;
    Noh *p;
    visitado[v] = 1; // marca v como visitado
    // para cada vizinho de v que ainda não foi visitado
    p = G->A[v];
    while (p != NULL) {
        w = p->rotulo;
        if (visitado[w] == 0)
            buscaProfTempoTermR(G, w, visitado, tempoTermino,
ptempo);
        p = p->prox;
    }
    // observe que o vetor é indexado pelos tempos e armazena
    // os vértices em ordem crescente de tempo de término
    tempoTermino[*ptempo] = v;
    (*ptempo)++;
}
```

- Um detalhe importante é que,
    - este algoritmo armazena os tempos de término
        - usando um vetor indexado por tempo de término,
            - cujos conteúdos são os rótulos dos vértices.
- Isso é mais eficiente que armazenar um vetor indexado por vértices,
    - cujos conteúdos são tempos de término,
        - pois quando o próximo algoritmo for usar tais tempos,
            - o vetor não precisa ser ordenado.
- Uma curiosidade é que, o que o algoritmo faz
    - é equivalente a empilhar os vértices conforme eles são finalizados,
        - e na segunda passada ir desempilhando para visitá-los.

Voltando ao nosso problema de detectar componentes fortemente conexos.

- Nosso interesse era encontrar vértices
    - que estão em componentes sorvedouros.
- Isso porque, fazer uma busca a partir de um vértice de um sorvedouro,
    - encontra todos os vértices de uma componente fortemente conexa,
        - e nenhum a mais.

No entanto, acabamos de analisar e implementar um algoritmo

- para encontrar vértices de componentes fontes.
    - Como isso nos ajuda a resolver nosso problema?

Para resolvê-lo, vamos começar invertendo a orientação dos arcos.

- Só então vamos realizar o loop da busca em profundidade,
  - para registrar os tempos de término.
- Isso porque, um componente fonte no grafo invertido
  - é um componente sorvedouro no grafo original.
- Note que, inverter os arcos não altera os conjuntos de vértices
  - que pertencem a cada componente fortemente conexo. Por que?

Algoritmo de Duas Passadas de Kosaraju

1. Computa Grev invertendo todos os arcos de G.
2. Roda LoopBuscaProfTempoTerm(Grev) para computar os tempos de término,
   a. que permitirão localizar vértices de componentes sorvedouros.
3. Executa LoopBuscaProfIdentComp(G), começando cada busca em
   a. ordem decrescente de tempo de término e
   b. marcando os vértices visitados em cada busca com um rótulo distinto.

Código da função principal do algoritmo de Kosaraju:

```c
void identCompForteConexo(Grafo G, int *comp) {
    int u, v, *tempoTermino;
    Noh *p;
    Grafo Grev;
    Grev = inicializaGrafo(G->n);
    // reverte os arcos do grafo G
    for (u = 0; u < G->n; u++) {
        p = G->A[u];
        while (p != NULL) {
            v = p->rotulo;
            insereArcoGrafo(Grev, v, u);
            p = p->prox;
        }
    }
    tempoTermino = malloc(G->n * sizeof(int));
    loopBuscaProfTempoTerm(Grev, tempoTermino);
    Grev = liberaGrafo(Grev);
    loopBuscaProfIdentComp(G, tempoTermino, comp);
    free(tempoTermino);
}
```

Eficiência:

- Este algoritmo executa em tempo O(n + m).
- Vale destacar que, para tanto é necessário
  - representar o grafo com listas de adjacência,
    - e tomar o cuidado de armazenar os vértices
      - em ordem decrescente de tempo de término.

Faltou detalharmos os pseudocódigos do passo três do algoritmo:

```
LoopBuscaProfIdentComp(grafo G=(V,E))
    marque todos os vértices em V como não visitados
    r = 0
    // suponha que os vértices estão nomeados de acordo com seus tempos de
término calculados anteriormente
    para v = n até 1
        se v não foi visitado
            r++
            buscaProfRecIdentComp(G, v)


buscaProfRecIdentComp(grafo G=(V,E), vértice v)
    marque v como visitado
    comp(v) = r
    para cada arco (v, w)
        se w não foi visitado
            buscaProfRecIdentComp(G, w)
```

Código do loop da busca em profundidade para identificar os componentes:

```c
void loopBuscaProfIdentComp(Grafo G, int *tempoTermino, int *comp) {
    int v, i, num_comp;
    // inicializa todos como não pertencentes
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        comp[v] = -1;
    num_comp = 0;
    // inicia buscas a partir de vértices não visitados
    // seguindo a ordem decrescente dos tempos de término
    for (i = G->n - 1; i >= 0; i--) {
        v = tempoTermino[i];
        if (comp[v] == -1) {
            num_comp++;
            buscaProfIdentCompR(G, v, comp, num_comp);
        }
    }
}
```

```c
void buscaProfIdentCompR(Grafo G, int v, int *comp, int num_comp) {
    int w;
    Noh *p;
    comp[v] = num_comp; // coloca v no componente atual
    // para cada vizinho de v que ainda não foi visitado
    p = G->A[v];
    while (p != NULL) {
        w = p->rotulo;
        if (comp[w] == -1)
            buscaProfIdentCompR(G, w, comp, num_comp);
        p = p->prox;
    }
}
```

Agora vamos mostrar que o algoritmo está correto, ou seja,

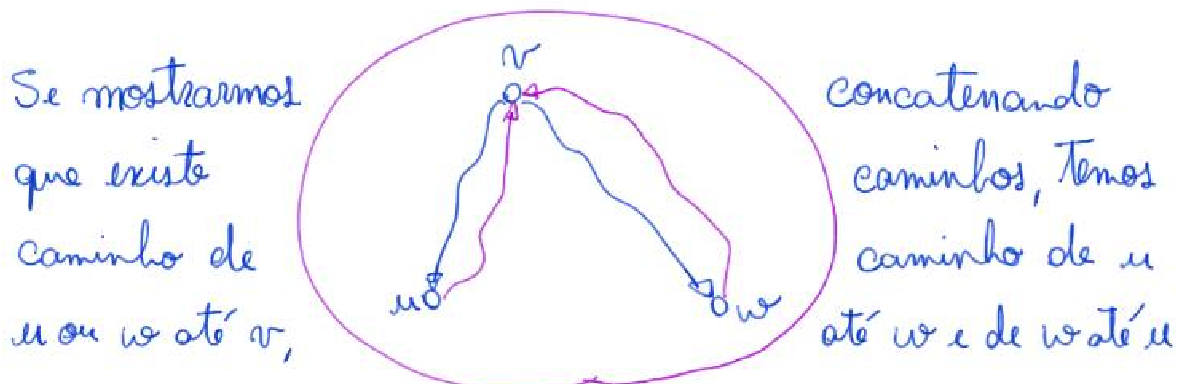
- que a busca a partir de um vértice v com maior tempo de término
    - realmente revela um componente fortemente conexo.

Observe que, existe um caminho a partir de v

- até qualquer vértice w que a busca encontrou (pela propriedade da busca).

Então, só precisamos mostrar que

- existe um caminho de um vértice w qualquer até v.



- Isso porque, pela transitividade (decorrente da concatenação de caminhos)
    - isso implica que existe caminho nos dois sentidos
        - entre qualquer par de vértices localizado na busca,
- o que implica que temos uma componente fortemente conexa.

Assim, tome um vértice w qualquer que foi alcançado a partir de v,

- queremos mostrar que existe um caminho a partir de w até v em G.

$\exists\ w \rightsquigarrow v$ em G?

Sabemos que em G o vértice v alcança w,

$$\exists\ v \rightsquigarrow w \text{ em } G$$

- portanto em Grev existe um caminho de w até v.

$$\exists\ w \rightsquigarrow v \text{ em } Grev$$

Além disso, o tempo de término de v é maior que o tempo de término de w
- nas buscas realizadas em Grev no passo 1 do algoritmo.

$$t[v] > t[w]$$

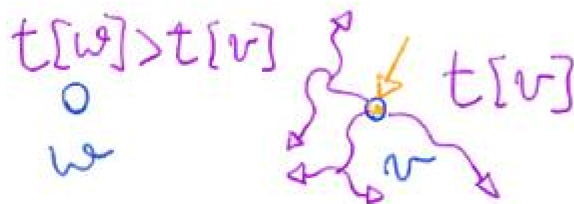
Vamos analisar as possibilidades para que isso ocorra,
- i.e., para que t[v] seja maior que t[w].

Primeiro, vamos determinar qual vértice entre v e w
- foi visitado antes no passo 1 do algoritmo,
  - em que as buscas ocorrem em Grev.

Caso 1: Suponha que w foi visitado antes que v em Grev.

- Neste caso, o tempo de término de w seria maior que de v,
  - i.e., t[w] > t[v], já que existe o caminho de w até v em Grev.
- Portanto, o caso 1 não pode ter ocorrido.

Caso 2: Consideramos que v foi visitado antes que w.
- Caso 2.1: Supomos que não há caminho de v até w em Grev.



  - Neste caso, v será finalizado antes de w ser visitado e
    - quando w for finalizado receberá tempo de término maior que v,
      - i.e., t[w] > t[v].
  - Portanto, o caso 2.1 também não pode ter ocorrido.
- Caso 2.2: Assim, só nos resta concluir que há caminho de v até w em Grev,

$$\exists\ v \rightsquigarrow w \text{ em } Grev$$

  - para que seja possível t[v] > t[w].

Note que, isso implica na existência de um caminho de w até v em G,

$\exists\, w \rightsquigarrow v$ em G

- que é o que queríamos demonstrar.

Quiz1: O que acontece se no passo 2 do algoritmo

- trocarmos a busca em profundidade que identifica os componentes
  - por uma busca genérica?
- Dica: alguma propriedade específica da busca em profundidade é usada?

Quiz2: O que acontece se fizermos o passo 1 do algoritmo no grafo original,

- e o passo 2 no grafo invertido?
  - O algoritmo ainda funciona?
- Dica: neste caso os tempos de término
  - vão identificar vértices de componentes fonte,
- mas o que serão esses componentes durante a busca em Grev?