AED2 - Aula 22
Busca em profundidade, conectividade

Busca em grafos

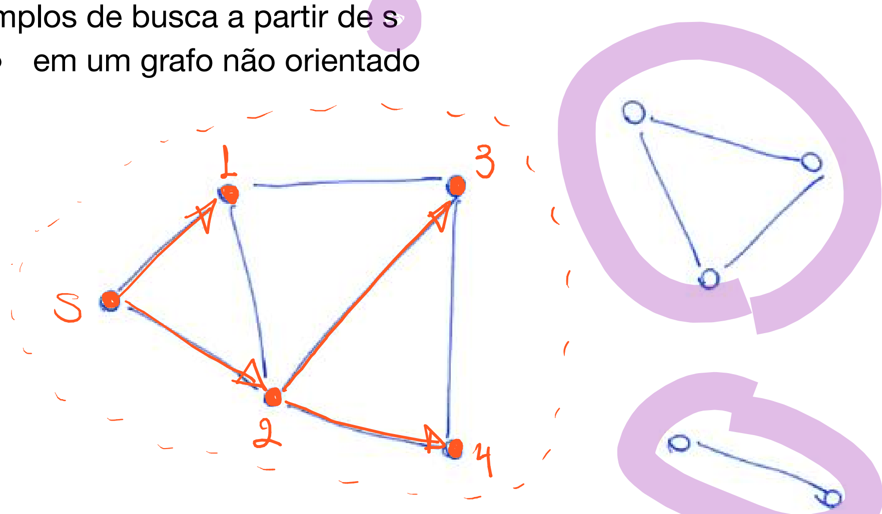
Busca em grafos é, possivelmente, a operação
- mais básica
- importante
- e genérica

para se fazer em um grafo.

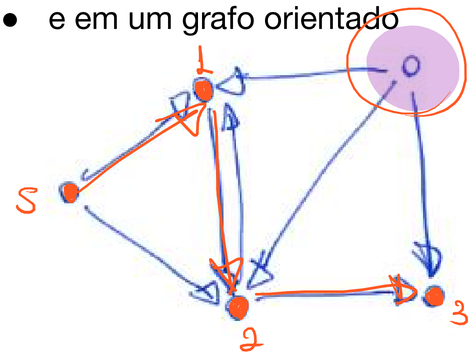
Isso porque ela é fundamental para
- obter informações sobre conectividade,
    - i.e., determinar como e com quem se conecta cada vértice.
- Além disso, ela pode ser especializada em vários tipos de busca.

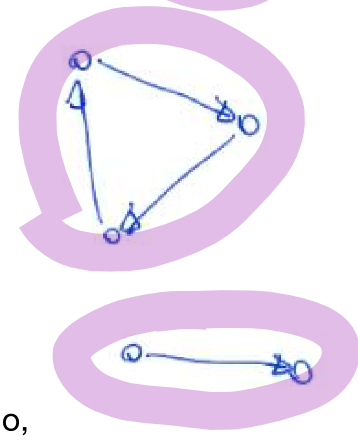
A busca em grafos genérica encontra todos os vértices
- que podem ser alcançados a partir de um vértice inicial.
- A ordem em que se visita os vértices é arbitrária, e a única restrição
    - é ir sempre de um vértice encontrado para um não encontrado.

Exemplos de busca a partir de s
- em um grafo não orientado



- e em um grafo orientado





    - Note que, em um grafo orientado,
        - a busca respeita a orientação dos arcos.

Pseudocódigo:

busca Genérica($G = (V,E)$, s)
 marcar todo $v \in V$ como não encontrado — $O(n)$
 marcar s como encontrado
 — enquanto (existir aresta (u, v) c/ u encontrado e v ñ encontrado)
 marque v como encontrado

— Corretude:

- Ao fim do algoritmo, um vértice v foi encontrado
  - se, e somente se, existe um caminho em G de s até v.

Demonstração:

(-->) Vamos provar a ida por indução.

O caso base vale porque no início o único vértice encontrado é o próprio s

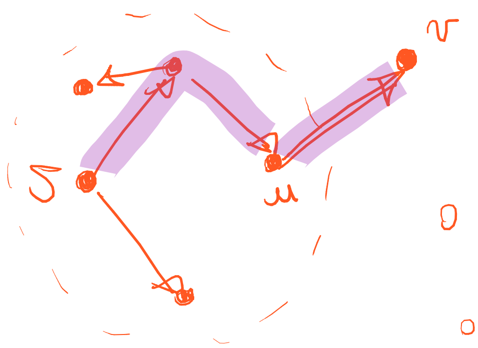
- e é conhecido um caminho trivial de s para s.

Nossa hipótese de indução é que a afirmação é verdadeira

- até a iteração anterior ao algoritmo encontrar o vértice v.
- Mais precisamente, supomos que é conhecido um caminho de s
  - até qualquer vértice encontrado antes do início da iteração
    - em que o algoritmo encontra v,
  - e que estes caminhos só usam vértices encontrados.

Desenvolvemos o passo assim:

- Na iteração em que o algoritmo encontra v,
  - ele o faz através de uma aresta (u, v),
    - sendo que u já estava encontrado.



- Pela hipótese de indução, sabemos que existe um caminho de s até u.
- Concatenando o caminho de s até u com a aresta (u, v),
  - temos um caminho de s até v.
- Note que o caminho de s até u não passa por v
  - porque ele só usa vértices encontrados previamente.

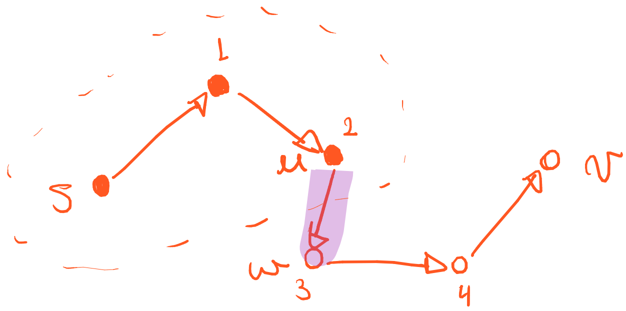
(⟵) Para provar a volta supomos, por contradição,

- que existe um caminho de s até v, mas v não foi encontrado.

Lembramos que neste tipo de prova queremos chegar a um absurdo.

Começamos percorrendo o caminho de s até v,

- mas paramos ao encontrar a primeira aresta
  - que leva de um vértice encontrado para um vértice não encontrado.



- Note que, tal aresta deve existir, pois
  - o caminho começa com um vértice encontrado (s)
    - e termina com um não encontrado (v).
- Digamos que esta aresta é (u, w),
  - sendo que u pode ser o próprio s e w pode ser o próprio v.

De posse da aresta (u, w) consideramos o comportamento do algoritmo

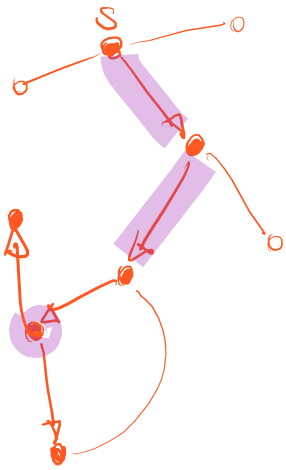
- e notamos que ele não pára enquanto existir uma aresta do tipo de (u, w),
  - ou seja, que tem origem encontrada e destino não encontrado.
- Portanto, temos um absurdo e concluímos a demonstração.

Q.E.D.

Eficiência:

- Em cada iteração do algoritmo, vamos sempre
  - de um vértice encontrado para um não encontrado,
- nunca visitando um vértice
  - ou percorrendo um arco mais que uma vez.
- Isso sugere que a eficiência do algoritmo é proporcional
  - ao número de vértices mais o número de arestas do grafo. $O(n+m)$
- Note que, se o grafo não for orientado
  - consideramos cada aresta até duas vezes.
- Vamos analisar mais detalhadamente a eficiência da busca
  - em suas subsequentes implementações.

Busca em profundidade



Agora vamos estudar uma especialização da busca genérica,

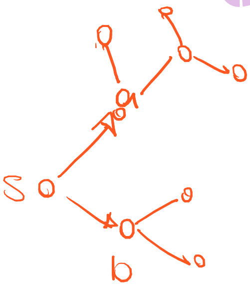
- chamada de busca em profundidade,
  - também conhecida por DFS (Depth-First Search).
- Esta busca explora um caminho do grafo
  - até que não haja mais para onde estendê-lo.
- Então volta pelo caminho percorrido,
  - procurando outras rotas ainda não visitadas.

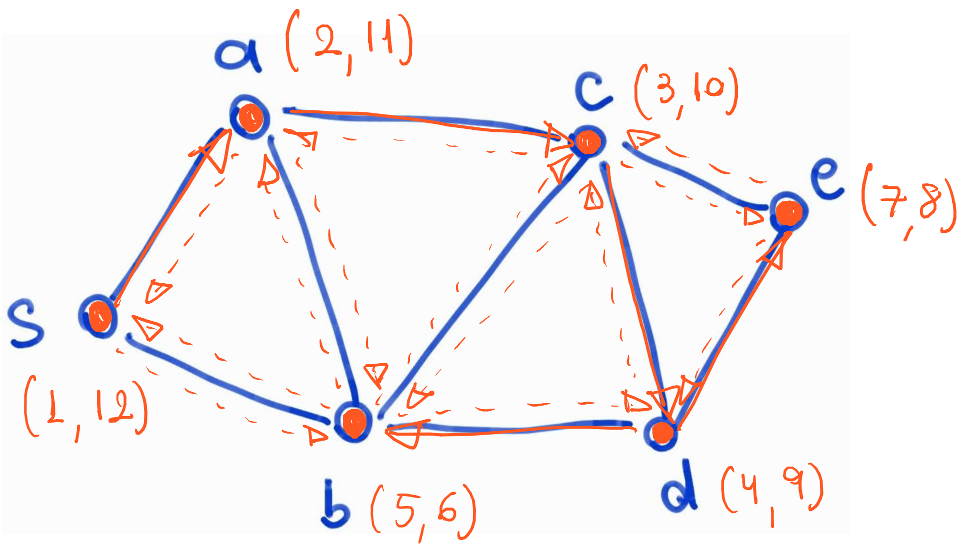
O comportamento da DFS está intimamente relacionado

- com a estrutura de dados pilha (stack ou LIFO),
- e ela também pode ser implementada utilizando recursão.

Exemplo de busca em profundidade:

- Usamos o termo tempo de início (ou de abertura) de um vértice,
  - como sinônimo de ordem de chegada,
- e tempo de término (ou de fechamento) de um vértice,
  - como sinônimo de ordem de saída.





Observem que, os tempos de início e término dos vértices nos contam

- quais vértices foram alcançados a partir de um determinado vértice.

Mais especificamente, se um vértice u tem tempo de início i e de término t,

- todo vértice com tempo de início maior que i e menor que t
  - foi alcançado a partir de u.

Antes de começar a busca em profundidade, é necessário uma inicialização

- em que todo vértice em V é marcado como não visitado.

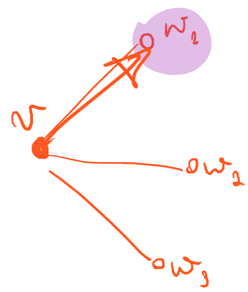
```
void buscaProf(Grafo G, int origem, int *ordem_chegada,
               int *ordem_saida) {
    int i, tempo;
    for (i = 0; i < G->n; i++) { // inicializa como não encontrados
        ordem_chegada[i] = -1;
        ordem_saida[i] = -1;
    }
    tempo = 1;
    buscaProfR(G, origem, ordem_chegada, ordem_saida, &tempo);
    // buscaProfI(G, origem, ordem_chegada, ordem_saida, tempo);
}
```

- Note que, esta inicialização leva tempo linear no número de vértices,
    - i.e., O(n).

Busca em profundidade recursiva

Pseudocódigo:

buscaProfR(G = (V,E), v)
    marque v como visitado
    para cada aresta (v, w)
        se w não foi visitado
            buscaProfR(G, w)



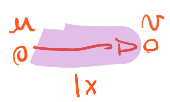
Corretude:

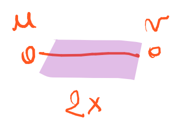
- Encontra todos os vértices alcançáveis, ou seja,
    - para os quais existe caminho a partir de v.
- Segue da corretude da busca genérica, já que é um caso particular daquela.

\# de vértices da componente de v
\# de arestas da componente de v

Eficiência:

- Leva tempo O(n_v + m_v), onde n_v e m_v são, respectivamente,
    - o número de vértices e arestas da componente do vértice v
        - da primeira chamada da recursão.
- Resultado segue porque
    - cada vértice da componente será visitado uma vez,
        - antes de ser marcado como visitado,
    - e cada aresta será considerada no máximo
        - duas vezes (no caso de grafos não orientados)
        - ou apenas uma vez (no caso dos orientados),
    - já que uma aresta só é considerada
        - quando seu vértice está sendo visitado.

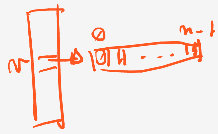




A seguir temos implementações recursivas de busca em profundidade

- que registram a ordem de chegada e saída de cada nó.

Código busca em profundidade com grafo implementado por matriz de adjacência.

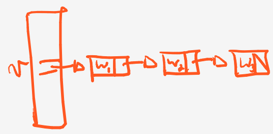


```
void buscaProfR(Grafo G, int v, int *ordem_chegada,
           int *ordem_saida, int *ptempo) {
    int w;
    ordem_chegada[v] = (*ptempo)++;
    /* para cada vizinho de v que ainda não foi visitado */
    for (w = 0; w < G->n; w++)
        if (G->A[v][w] == 1 && ordem_chegada[w] == -1)
            buscaProfR(G, w, ordem_chegada, ordem_saida, ptempo);
    ordem_saida[v] = (*ptempo)++;
}
```

O(n)

- Qual a eficiência deste algoritmo?
    - O(n_s * n), sendo s o vértice origem. Por que?

Código busca em profundidade com grafo implementado por listas de adjacência.



```
void buscaProfR(Grafo G, int v, int *ordem_chegada,
           int *ordem_saida, int *ptempo) {
    int w;
    Noh *p;
    ordem_chegada[v] = (*ptempo)++;
    /* para cada vizinho de v que ainda não foi visitado */
    p = G->A[v];
    while (p != NULL) {
        w = p->rotulo;
        if (ordem_chegada[w] == -1)
            buscaProfR(G, w, ordem_chegada, ordem_saida, ptempo);
        p = p->prox;
    }
    ordem_saida[v] = (*ptempo)++;
}
```

- Qual a eficiência deste algoritmo?
    - O(n_s + m_s), sendo s o vértice origem. Por que?

Quiz1: Observe que as funções recursivas recebem o valor tempo

- a partir de um apontador ptempo. Por que?

Busca em profundidade implementada com pilha

Pseudocódigo:

```
buscaProfPilha (G = (V,E), s)
    marcar todo vértice como ñ visitado
    inicialize pilha P com s
    enquanto P ≠ ∅
        desempilhe vértice v de P
        se v ñ foi visitado
            marque v como visitado
            para cada aresta (v, w)
                se w ñ foi visitado
                    empilhe w em P
```

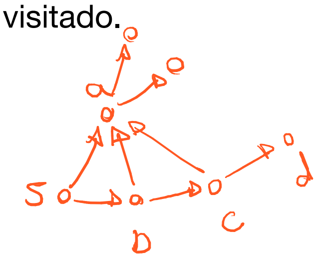
$O(m_s)$

Corretude:

- o algoritmo encontra todos os vértices alcançáveis a partir de s.
- Resultado segue da corretude do algoritmo de busca genérica.

Eficiência:

- O algoritmo leva tempo O(n) para
    - marcar todos os vértices do grafo como não visitados.
- O restante do algoritmo leva tempo $O(n_s + m_s)$,
    - sendo n_s e m_s o número de vértices e arestas
        - da componente que contém o vértice s.
- Para ver isso, observe que o algoritmo só visita as arestas de um vértice
    - após remover este vértice da pilha e ele já não ter sido visitado.
- Nesse caso, o vértice é marcado como visitado
    - antes do algoritmo visitar suas arestas.
- Portanto, uma aresta qualquer será visitada
    - no máximo uma vez a partir de cada vértice extremo
        - (no caso de um grafo não orientado)
    - ou apenas uma vez a partir de sua cauda
        - (no caso de um grafo dirigido).



$P = \cancel{s}\ \cancel{a}\ \cancel{b}\ \cancel{a}\ \cancel{c}\ \cancel{a}\ \cancel{d}$

- Notamos que, embora vértices visitados não sejam adicionados à pilha,
    - um vértice pode ser empilhado várias vezes, antes de ser visitado.
- Nesse caso, ele será marcado como visitado na primeira vez
    - que for removido da pilha, e nas vezes subsequentes será descartado.
- Destacamos que o número total de inserções (e remoções)
    - que podem ocorrer na pilha ao longo de toda a execução do algoritmo
        - é limitada pela soma dos graus de entrada dos vértices.
- Isso porque, para um vértice ser colocado mais de uma vez,
    - ele tem que ser destino de diversas arestas.
- Assim, concluímos que o algoritmo executa um número de passos
    - limitado superiormente pelo número de vértices
        - mais arestas da componente de s, ou seja, $O(n_s + m_s)$.

A seguir temos implementações iterativas com pilha de busca em profundidade

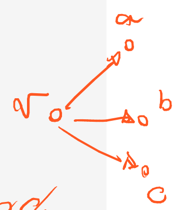
- que registram a ordem de chegada e saída de cada nó.
- Quiz2: O que elas fazem para registrar corretamente a ordem de saída?

Observe que as funções ~~recursivas~~ recebem o valor tempo diretamente.

- Por que não precisam operar com um apontador ptempo?

Código busca em profundidade com grafo implementado por matriz de adjacência.

```
void buscaProfI(Grafo G, int origem, int *ordem_chegada,
                int *ordem_saida, int tempo) {
    int v, w;
    // pilha implementada em vetor
    int *pilha;
    int topo = 0;
    pilha = malloc(G->m * sizeof(int));
    /* colocando a origem na pilha */
    pilha[topo++] = origem;
    /* enquanto a pilha dos ativos (encontrados
    mas não visitados) não estiver vazia */
    while (topo > 0) {
        /* remova o mais recente da pilha */
        v = pilha[--topo];
        if (ordem_chegada[v] == -1) { // se v não foi visitado
            ordem_chegada[v] = tempo++;
            pilha[topo++] = v; // Quiz2: por que empilhar v aqui?
            /* para cada vizinho de v que ainda não foi visitado */
            for (w = 0; w < G->n; w++)
                if (G->A[v][w] == 1 && ordem_chegada[w] == -1)
                    pilha[topo++] = w; // empilha o vizinho
        }
        else if (ordem_saida[v] == -1)
            ordem_saida[v] = tempo++;
    }
    free(pilha);
}
```



pilha ... v v a b c

- Qual a eficiência deste algoritmo?
  - O(n_s * n), sendo s o vértice origem. Por que?

Código busca em profundidade com grafo implementado por listas de adjacência.

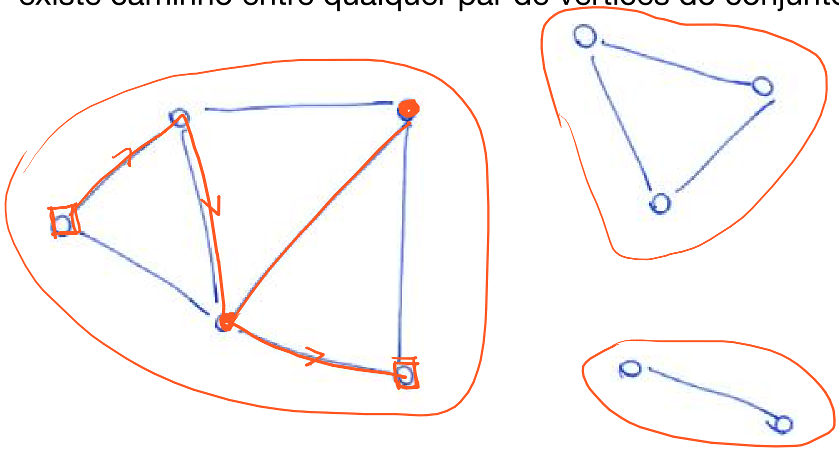
```
void buscaProfI(Grafo G, int origem, int *ordem_chegada,
             int *ordem_saida, int tempo) {
    int v, w;
    Noh *p;
    // pilha implementada em vetor
    int *pilha;
    int topo = 0;
    pilha = malloc(G->m * sizeof(int));
    /* colocando a origem na pilha */
    pilha[topo++] = origem;
    /* enquanto a pilha dos ativos (encontrados
    mas não visitados) não estiver vazia */
    while (topo > 0) {
        /* remova o mais recente da pilha */
        v = pilha[--topo];
        if (ordem_chegada[v] == -1) { // se v não foi visitado
            ordem_chegada[v] = tempo++;
            pilha[topo++] = v; // Quiz2: por que empilhar v aqui?
            /* para cada vizinho de v que ainda não foi visitado */
            p = G->A[v];
            while (p != NULL) {
                w = p->rotulo;
                if (ordem_chegada[w] == -1)
                    pilha[topo++] = w; // empilha o vizinho
                p = p->prox;
            }
        }
        else if (ordem_saida[v] == -1)
            ordem_saida[v] = tempo++;
    }
}
```

- Qual a eficiência deste algoritmo?
    - O(n_s + m_s), sendo s o vértice origem. Por que?

Componentes conexos de um grafo não-orientado

Um componente conexo de um grafo não-orientado

- é um conjunto de vértices tal que
  - existe caminho entre qualquer par de vértices do conjunto.



Para encontrar os componentes conexos de um grafo não-orientado,

- usamos uma busca em grafos, como a DFS,
  - que é invocada a partir de cada vértice do grafo.
- Cada invocação está associada com um rótulo/valor distinto,
  - que será atribuído a todos os vértices encontrados naquela busca.
- No final temos uma partição dos vértices do grafo.

Pseudocódigo:

```
componentes (G = (V, E))
    num_comps = 0
    marque todo vértice com ñ encontrado        O(n)
O(n) -> para cada v ∈ V
          se v ñ foi encontrado
              num_comp++
              busca (G, v, num_comps)
```

Note que, busca(G, v, num_comps) é uma variante da busca genérica

- que atribui rótulo num_comps para todo vértice w encontrado,
  - i.e., que faz comp[w] = num_comps.
- Observe que num_comps só é incrementado quando uma busca termina
  - e a execução volta para o laço principal de componentes(G).

Eficiência:

- O(n + m), pois cada chamada da busca tem custo proporcional
  - ao número de vértices e arestas do componente conexo visitado.

Código para identificar componentes

- com grafo implementado por listas de adjacência
  - e usando busca em profundidade recursiva.

```
void identComponetes(Grafo G, int *comp) {
    int v, num_comps;
    /* inicializa todos os vértices como sem componente */
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        comp[v] = -1;
    num_comps = 0;
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        if (comp[v] == -1) {
            num_comps++;
            buscaCompR(G, v, comp, num_comps);
        }
}

void buscaCompR(Grafo G, int v, int *comp, int comp_atual) {
    int w;
    Noh *p;
    comp[v] = comp_atual;
    /* para cada vizinho de v que ainda não foi visitado */
    p = G->A[v];
    while (p != NULL) {
        w = p->rotulo;
        if (comp[w] == -1)
            buscaCompR(G, w, comp, comp_atual);
        p = p->prox;
    }
}
```

- Quiz3: Implemente uma versão da função buscaCompR, que não seja recursiva, mas baseada na nossa implementação da busca em profundidade iterativa com pilha.