AED2 - Aula 21

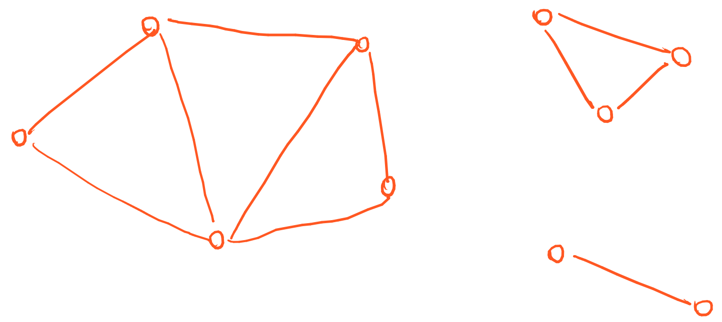
Grafos: tipos, implementação e construção aleatória

Grafos são uma estrutura matemática muito estudada

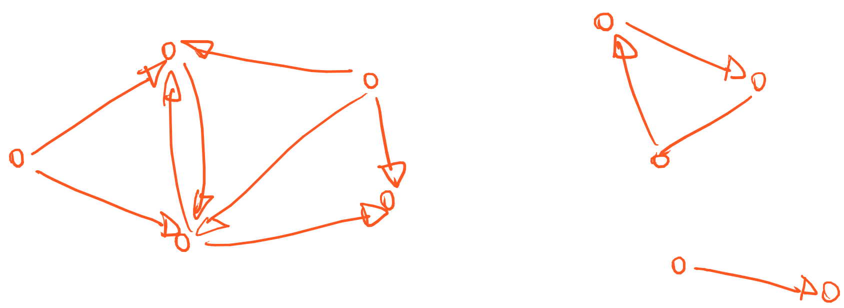
- e um Tipo Abstrato de Dado (TAD) usado para
    - representar relações entre elementos de um conjunto.
- Como todo TAD, precisa ser implementado por alguma estrutura de dados.
    - Vamos estudar algumas dessas estruturas.

Grafos são formados por dois componentes:

- Um conjunto de vértices (ou nós) V, e um conjunto de pares de vértices E.
- Se estes pares são não ordenados
    - os chamamos de arestas e o grafo é dito não orientado.



- Se os pares são ordenados
    - os chamamos de arcos e o grafo é dito orientado (ou dirigido).



Em geral, grafos são representados compactamente como G = (V, E), e usamos

- n = |V| para indicar o número de vértices,
- m = |E| para indicar o número de arestas.

Grafos são relevantes tanto na matemática quanto na computação, pois

- conseguem modelar uma grande variedade de cenários, como:
    - Redes físicas (elétrica, comunicações, transportes),
    - redes conceituais (Web, sociais, lógicas, biológicas),
    - estruturas como listas encadeadas e árvores,
    - relações de dependência ou interação (grafo de filmes e atores),
    - mapas, etc.
- Quiz1: quem são os vértices e as arestas (ou arcos) em cada cenário?
    - Quais cenários são não-orientados e quais são orientados?

De modo mais geral, grafos modelam relações entre pares de um mesmo conjunto,

- ou relações entre pares de conjuntos relacionados,
    - o que abre uma imensa gama de possibilidades.

Densidade de grafos

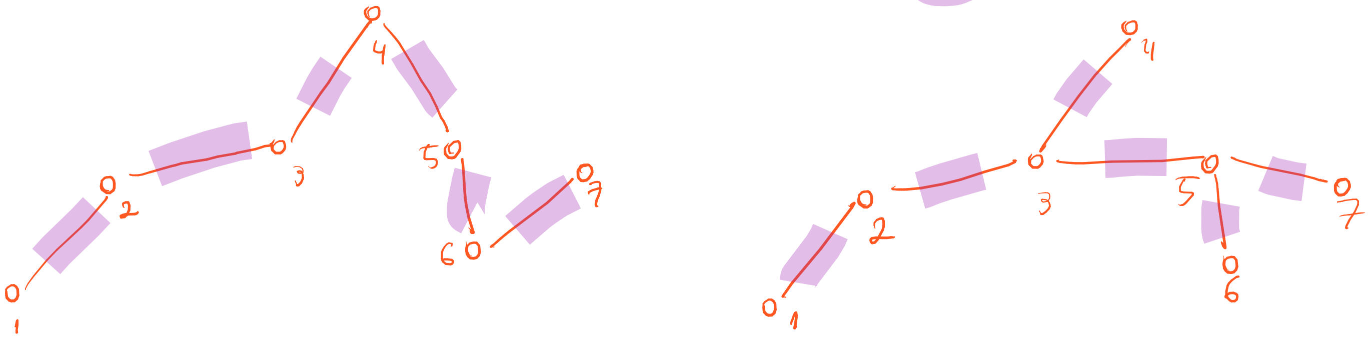
$G = (V, E)$

Grafos podem ser densos ou esparsos,

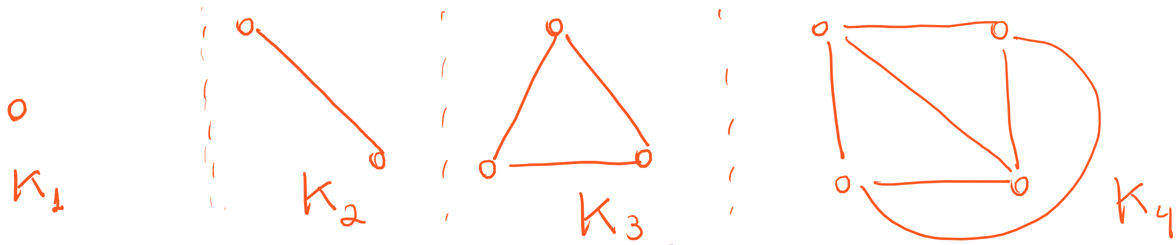
- o que diz respeito ao número de arestas que estes possuem.

Um grafo não orientado, conexo e sem arestas múltiplas possui:

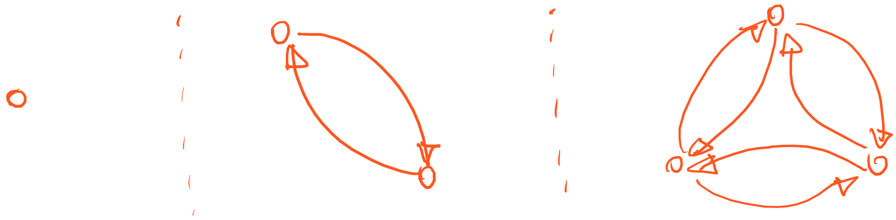
- No mínimo n - 1 arestas, caso em que o grafo é uma árvore



  - Quiz2: Por que? Dica: comece sem arestas e vá adicionando até ter um grafo conexo.
- No máximo (n escolhe 2) = n (n - 1) / 2 arestas, caso de um grafo completo



  - Um grafo orientado completo tem n (n - 1) arcos,
    - i.e., o dobro do não orientado, pois entre cada par de vértices podem ter dois arcos em sentidos opostos.

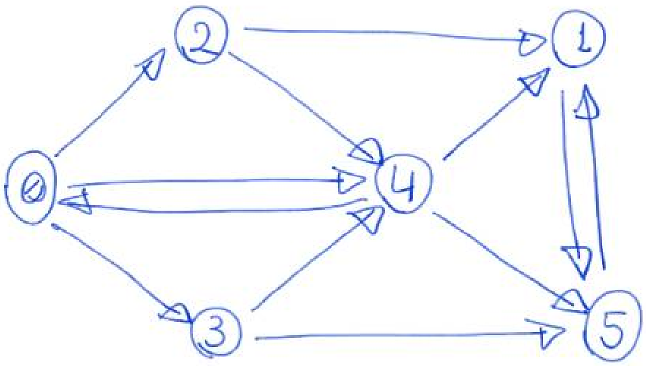


Assim, o número de arestas de um grafo varia entre O(n) até O(n^2).

- Dizemos que um grafo é esparso quando seu número de aresta
  - está próximo a n ou até n log n.
- Dizemos que ele é denso quando o número de arestas
  - está próximo de n^2 ou pelo menos superior n^3/2 = n * n^1/2. $= n\sqrt{n}$
- Embora, onde passa a linha exatamente seja arbitrário.

Existem duas implementações principais para grafos,

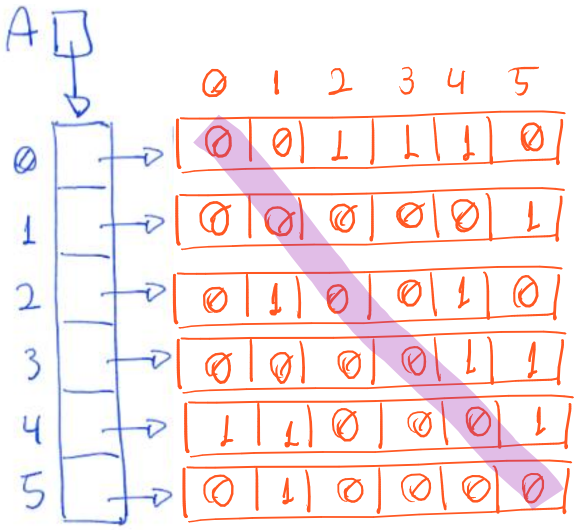
- i.e., duas estruturas de dados usadas para representá-los.
- Em ambas, os vértices são rotulados por inteiros não negativos.

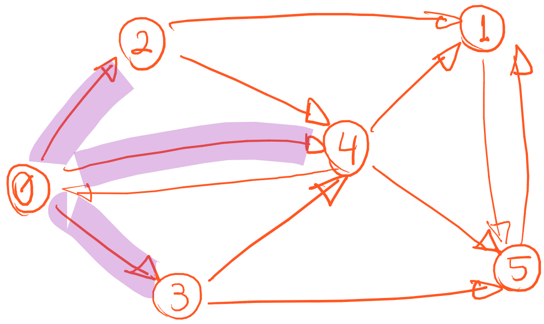


Matriz de adjacência

Esta implementação utiliza uma matriz A de 0s e 1s com n linhas e n colunas

- sendo que o valor da célula A[i][j]
    - indica se existe uma aresta/arco entre os vértices i e j.





- Assim, a linha i da matriz A representa o leque de saída do vértice i
    - e a coluna j de A representa o leque de entrada do vértice j.
- A diagonal da matriz é preenchida por 0s, pois não temos auto-laços.
- Se o grafo não for orientado, a matriz é simétrica, i.e., A[i][j] = A[j][i].

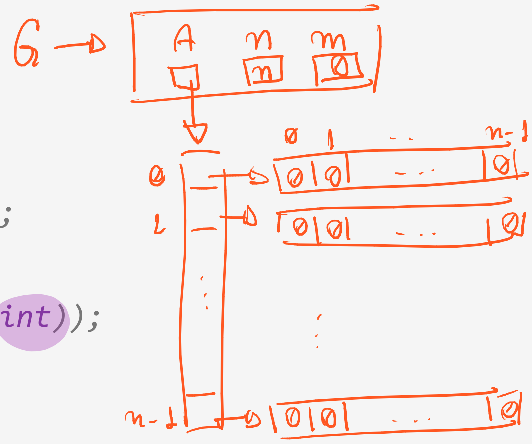
Interface para grafo implementado como matriz de adjacência:

grafosMatrizAdj.h

```
typedef struct grafo *Grafo;
struct grafo {
    int **A;
    int n; // número de vértices
    int m; // número de arestas/arcos
};

Grafo inicializaGrafo(int n);
void insereArcoGrafo(Grafo G, int v, int w);
void insereArcoNaoSeguraGrafo(Grafo G, int v, int w);
void removeArcoGrafo(Grafo G, int v, int w);
void mostraGrafo(Grafo G);
void imprimeGrafo(Grafo G);
Grafo liberaGrafo(Grafo G);
```

Código de operações básicas para grafo implementado como matriz de adjacência:

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "grafosMatrizAdj.h"

// Constrói um grafo com vértices 0 1 .. n-1 e nenhum arco.
Grafo inicializaGrafo(int n) {
    int i, j;
    Grafo G = malloc(sizeof *G);
    G->n = n;
    G->m = 0;
    G->A = malloc(n * sizeof(int *));
    for (i = 0; i < n; i++)
        G->A[i] = malloc(n * sizeof(int));
    for (i = 0; i < n; i++)
        for (j = 0; j < n; j++)
            G->A[i][j] = 0;
    return G;
}
```



O(n^2)

```c
/* Insere arco v-w no grafo G, supondo que v e w são inteiros
distintos entre 0 e n-1. Se grafo já tem arco v-w, não faz nada. */
void insereArcoGrafo(Grafo G, int v, int w) {
    if (G->A[v][w] == 0) {
        G->A[v][w] = 1;
        G->m++;
    }
}
```

O(1)

```c
// Versão da insereArcoGrafo() que não testa se v-w já está presente
void insereArcoNaoSeguraGrafo(Grafo G, int v, int w) {
    G->A[v][w] = 1;
    G->m++;
}
```

O(1)

```c
/* Remove arco v-w do grafo G, supondo que v e w são inteiros
distintos entre 0 e n-1. Se não existe arco v-w, não faz nada. */
void removeArcoGrafo(Grafo G, int v, int w) {
    if (G->A[v][w] == 1) {
        G->A[v][w] = 0;
        G->m--;
```

O(1)

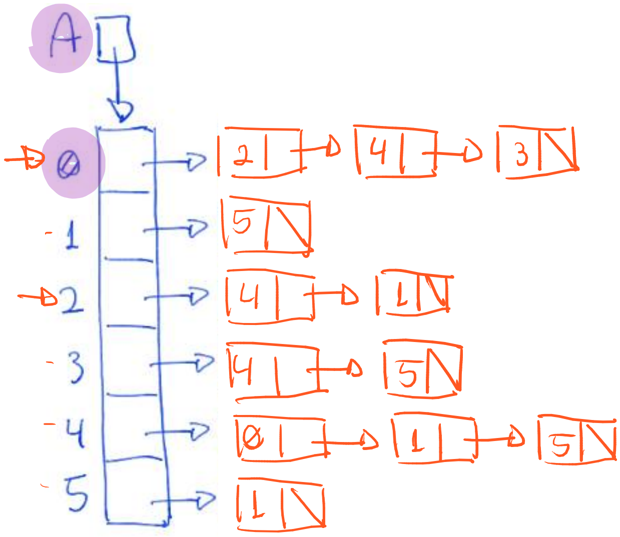
```
    }
}

// Imprime, para cada vértice v, os vértices adjacentes a v.
void mostraGrafo(Grafo G) {
    int i, j;
    for (i = 0; i < G->n; i++) {                       para cada vértice
        printf("%2d:", i);
        for (j = 0; j < G->n; j++)                     todos os possíveis vizinhos
O(n^2)      if (G->A[i][j] == 1)
                printf(" %2d", j);
        printf("\n");
    }
}

// Versão da mostraGrafo() com impressão mais limpa
void imprimeGrafo(Grafo G) {
    int i, j;
    for (i = 0; i < G->n; i++) {
        for (j = 0; j < G->n; j++)
            if (G->A[i][j] == 1)
                printf("%2d ", j);
        printf("-1"); // sentinela para marcar fim de lista
        printf("\n");
    }
}

// Libera a memória alocada para o grafo G e devolve NULL.
Grafo liberaGrafo(Grafo G) {
    int i;
    for (i = 0; i < G->n; i++) {
        free(G->A[i]);
O(n)    G->A[i] = NULL;
    }
    free(G->A);
    G->A = NULL;
    free(G);
    return NULL;
}
```

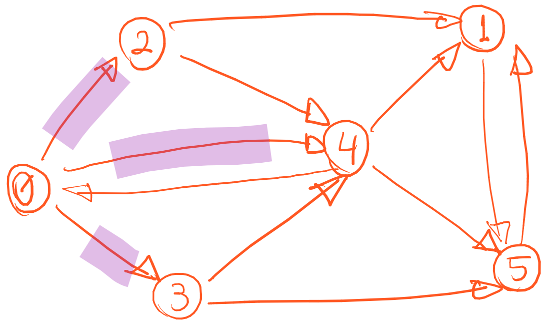
- Quiz3: Qual a eficiência das operações?
    - Algo muda se o grafo for denso ou esparso?

Listas de adjacência

Esta implementação utiliza um vetor A de apontadores de vértices de tamanho n

- e para cada vértice i temos uma lista ligada iniciada em A[i],
    - com os destinos das arestas que têm origem em i.





- Se o grafo não for orientado, dada uma aresta {i, j},
    - temos que j será inserido na lista de i
        - e i será inserido na lista de j.

Interface para grafo implementado como listas de adjacência:

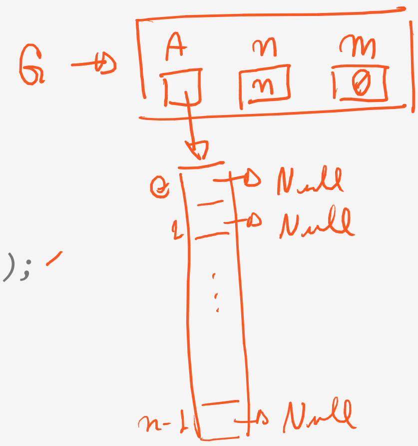
```
typedef struct noh Noh;
struct noh {
    int rotulo;
    Noh *prox;
};

typedef struct grafo *Grafo;
struct grafo {
    Noh **A;
    int n; // número de vértices
    int m; // número de arestas/arcos
};

Grafo inicializaGrafo(int n);
void insereArcoGrafo(Grafo G, int v, int w);
void insereArcoNaoSeguraGrafo(Grafo G, int v, int w);
void mostraGrafo(Grafo G);
void imprimeGrafo(Grafo G);
void imprimeArquivoGrafo(Grafo G, FILE *saida);
Grafo liberaGrafo(Grafo G);
```

grafosListasAdj.h

Código de operações básicas para grafo implementado como listas de adjacência:

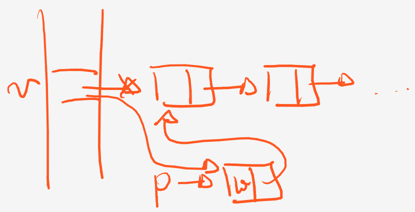
```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "grafosListasAdj.h"

// Constrói um grafo com vértices 0 1 .. n-1 e nenhum arco.
Grafo inicializaGrafo(int n) {
    int i;
    Grafo G = malloc(sizeof *G);
    G->n = n;
    G->m = 0;
    G->A = malloc(n * sizeof(Noh *));
    for (i = 0; i < n; i++)
        G->A[i] = NULL;
    return G;
}
```

$O(n)$




```c
/* Insere arco v-w no grafo G, supondo que v e w são inteiros
distintos entre 0 e n-1. Se grafo já tem arco v-w, não faz nada. */
void insereArcoGrafo(Grafo G, int v, int w) {
    Noh *p;
    for (p = G->A[v]; p != NULL; p = p->prox)
        if (p->rotulo == w)
            return;
    p = malloc(sizeof(Noh));
    p->rotulo = w;
    p->prox = G->A[v];
    G->A[v] = p;
    G->m++;
}
```

$O(|\delta(v)|)$




```c
// Versão da insereArcoGrafo() que não testa se v-w já está presente
void insereArcoNaoSeguraGrafo(Grafo G, int v, int w) {
    Noh *p;
    p = malloc(sizeof(Noh));
    p->rotulo = w;
    p->prox = G->A[v];
    G->A[v] = p;
    G->m++;
}
```

$O(1)$

```c
/* Imprime no arquivo saida, para cada vértice v, os vértices
adjacentes a v. */
void imprimeArquivoGrafo(Grafo G, FILE *saida) {
    int i;
    Noh *p;
    fprintf(saida, "%d %d\n", G->n, G->m);
    for (i = 0; i < G->n; i++) {
        for (p = G->A[i]; p != NULL; p = p->prox)
            fprintf(saida, "%2d ", p->rotulo);
        fprintf(saida, "-1"); // sentinela para marcar fim de lista
        fprintf(saida, "\n");
    }
}

// Libera a memória alocada para o grafo G e devolve NULL.
Grafo liberaGrafo(Grafo G) {
    int i;
    Noh *p;
    for (i = 0; i < G->n; i++) {
        p = G->A[i];
        while (p != NULL) {
            G->A[i] = p;
            p = p->prox;
            free(G->A[i]);
        }
        G->A[i] = NULL;
    }
    free(G->A);
    G->A = NULL;
    free(G);
    return NULL;
}
```

$O(n)$

$O(|\delta(i)|)$

$O(n+m)$

$O(n+m)$

- Quiz4: Qual a eficiência das operações?
  - Algo muda se o grafo for denso ou esparso?
  - Compare a versão segura e não segura da função insereArcoGrafo( ).

Comparação entre as estruturas de dados

Matriz de adjacência:

- Vantagens
  - Acessar um elemento A[i][j] qualquer leva tempo constante. $O(1)$
  - Economia de espaço quando o grafo é denso,
    - pois é possível operar sobre uma matriz de bits.
- Desvantagens
  - Ocupa espaço proporcional a n^2, ainda que o grafo seja esparso,
    - resultando na maioria dos elementos da matriz iguais a zero.
  - Visitar todos os nós para os quais um nó i tem conexão,
    - leva tempo proporcional a n, ainda que i tenha poucos vizinhos. $O(n)$
  - O mesmo vale para visitar todos os nós que tem conexão para i.

Listas de adjacência:

- Vantagens
  - Economia de memória quando o grafo é esparso,
    - pois ocupa espaço proporcional a n + m, $O(n+m)$
      - sendo n o número de nós e m o número de arestas.
  - Visitar todos os nós para os quais um nó i tem conexão,
    - leva tempo proporcional ao número de vizinhos de i. $O(|\delta(i)|)$
- Desvantagens
  - Verificar se um nó i tem conexão para um nó j
    - leva tempo linear no número de vizinhos do nó i. $O(|\delta(i)|)$
  - Quando o grafo é denso, a ordem de grandeza
    - tanto da memória quanto do tempo serão quadráticos,
    - e a memória ocupada por conexão é maior que na matriz.
  - Verificar quais nós tem conexão para um nó j
    - exige percorrer todas as listas.
    - Para contornar essa limitação, podemos usar listas ortogonais.

Grafos aleatórios

Podemos construir grafos aleatórios (na verdade, pseudoaleatórios),

- o que é muito útil para testar nossos algoritmos, por exemplo.

Existem duas maneiras principais de gerar grafos aleatórios.

Nossa primeira função constrói grafos aleatórios com exatamente m arcos.

```
/* Devolve um vértice aleatório do grafo G, supondo que G->n <=
RAND_MAX. */
int verticeAleatorio(Grafo G) {
    double r;
    r = (double)rand() / ((double)RAND_MAX + 1.0);
    return (int)(r * G->n);
}
```

$r \in [0, 1)$

$\in [0, n)$

```
/* Constrói um grafo aleatório com vértices 0..n-1
e exatamente m arcos, supondo que m <= n*(n-1). (Código inspirado no
Programa 17.7 de Sedgewick.) */
Grafo grafoAleatorio1(int n, int m) {
    Grafo G = inicializaGrafo(n);
    while (G->m < m) {
        int v = verticeAleatorio(G);
        int w = verticeAleatorio(G);
        if (v != w)
            insereArcoGrafo(G, v, w);
    }
    return G;
}
```

\# máx. de arcos

- Ela é particularmente útil para construir grafos esparsos grandes,
  - mas tende a ficar ineficiente se usada para construir grafos densos.
- Quiz5: Por que esse comportamento?
  - Qual a eficiência de melhor e pior caso dessa função?

Nossa segunda função constrói grafos aleatórios com m arcos em média,

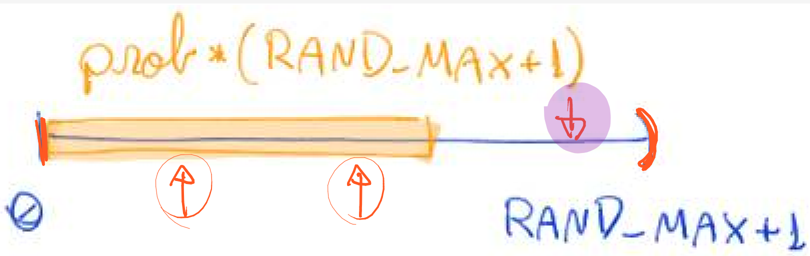
- sendo mais indicada para gerar grafos densos.

```
/* Constrói um grafo aleatório com vértices 0..n-1
e número de arcos esperado igual a m, supondo que m <= n*(n-1). */
Grafo grafoAleatorio2(int n, int m) {
    int v, w;
    double prob = (double)m / n / (n - 1);
    Grafo G = inicializaGrafo(n);
    for (v = 0; v < n; v++)
        for (w = 0; w < n; w++)
            if (v != w)
                if (rand() < prob * (RAND_MAX + 1.0))
                    insereArcoGrafo(G, v, w);
    return G;
}
```

máx de arcos

$\left[prob = m / (n(n-1)) \right]$

$O(n^2)$



- Quiz6: Qual a eficiência de tempo desta função?
  - E qual a vantagem da seguinte variante?

```
Grafo grafoAleatorio2_1(int n, int m) {
    int v, w;
    double prob = (double)m / n / (n - 1);
    Grafo G = inicializaGrafo(n);
    for (v = 0; v < n; v++)
        for (w = 0; w < n; w++)
            if (v != w)
                if (rand() < prob * (RAND_MAX + 1.0))
                    insereArcoNaoSeguraGrafo(G, v, w);
    return G;
}
```