AED2 - Aula 12
Problemas da seleção e da contagem de inversões

"Podemos fazer melhor?"
- mote do projetista de algoritmos

Uma das ideias centrais em algoritmos é que
- abordagens usadas para resolver um problema
    - podem ser bem sucedidas quando aplicadas/adaptadas
        - para problemas diferentes.

Nesta aula veremos como usar o que aprendemos
- ao estudar algoritmos eficientes para o problema da ordenação
    - para projetar algoritmos para dois problemas relacionados.

Problema da seleção

Definições:
- A ordem de um elemento é uma medida da grandeza dele
    - em relação aos seus pares.
- Assim, se a ordem de um elemento é k
    - então existem k elementos de valor menor que o dele.
- No problema da seleção, dado um vetor v de tamanho n
    - e um inteiro k em [0, n), queremos o valor do elemento de ordem k.

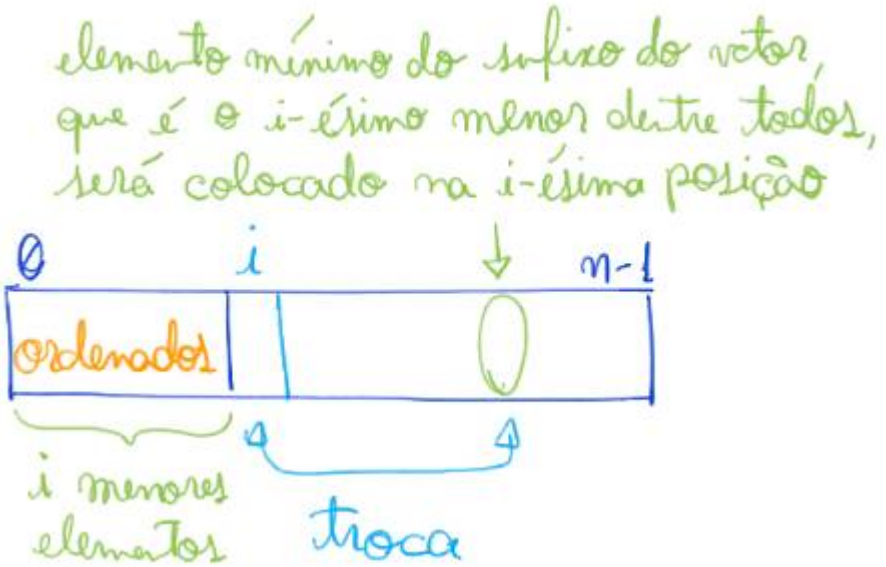
Exemplos:
- 3 2 5 4 1 e k = 3. Elemento de ordem 3 é 4
- 1 2 3 4 5 e k = 3. Elemento de ordem 3 é 4
- 5 4 3 2 1 e k = 3. Elemento de ordem 3 é 4

A resposta não muda nas diferentes permutações,
- pois a ordem de um elemento depende da comparação
    - de seu valor com os demais elementos,
- e não de sua posição no vetor.

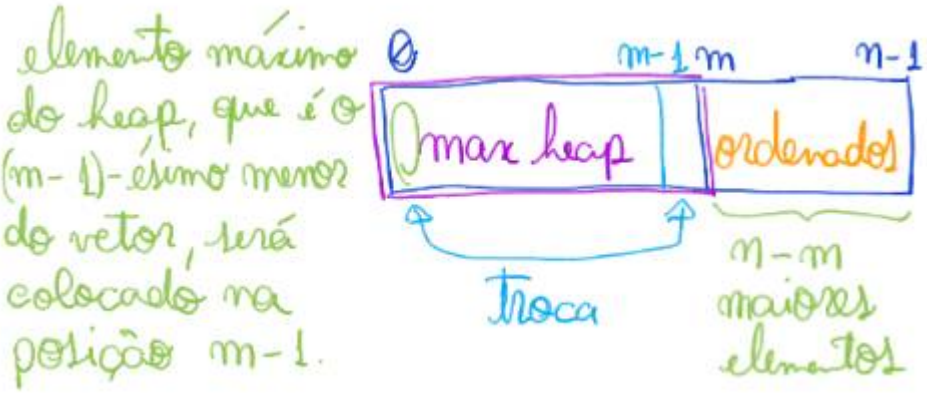
Curiosidades:
- Na permutação ordenada do vetor v[0 .. n - 1]
    - o elemento de ordem k ocupa a k-ésima posição.
- Note que, podemos definir ordem começando em 0 ou em 1.
    - Escolhi usar ela começando em 0, para combinar com nossos vetores.
    - Assim, o elemento de ordem k ocupa a posição v[k] se v for ordenado.
- Perceba que o problema do mínimo e do máximo
    - são casos particulares do problema da seleção.
        - Mínimo corresponde ao elemento de ordem 0.
        - Máximo corresponde ao elemento de ordem n - 1.
- Observe que o problema da seleção é trivial se v estiver ordenado,
    - ou se ordenarmos ele.
        - Qual seria a eficiência dessa abordagem?
- Será que conseguimos resolver o problema sem usar esta abordagem?

Em AED1, vimos um algoritmo baseado na ideia do selectionSort,

- com eficiência O(n k).



- Também vimos um algoritmo baseado na ideia do heapSort,
  - com eficiência O(n + (n - k) log n).

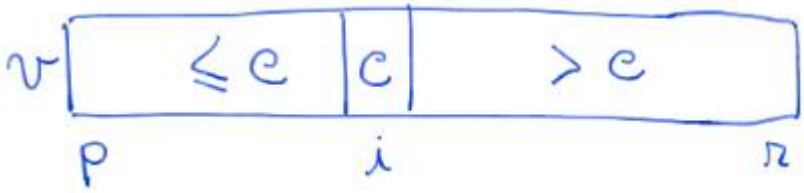


Vamos tentar obter um algoritmo mais eficiente para este problema,

- nos inspirando no quickSort ou,
  - mais especificamente, na rotina de separação.

Relembrando, no problema da separação temos vetor v com limites p e r,

- i.e., os elementos do vetor estão em v[p .. r],
  - e um pivô c que está em v[p .. r].
- O objetivo é separar os elementos do vetor de modo que
  - o prefixo deste tenha os elementos <= c,
  - e o sufixo tenha os elementos > c.



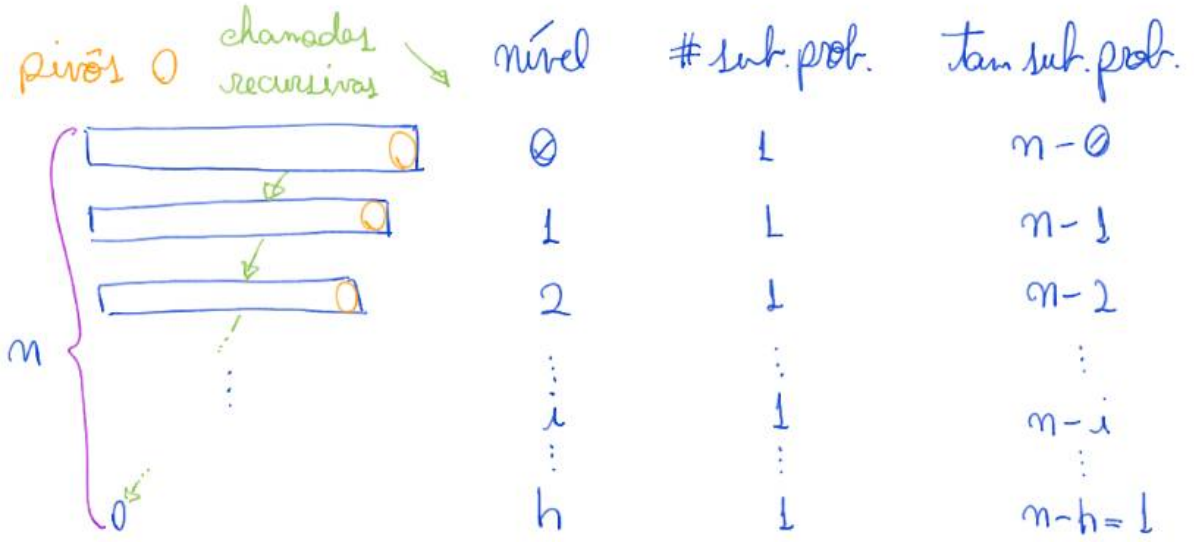
- Isto é, c deve terminar numa posição i tal que
  - v[p .. i - 1] <= c = v[i] < v[i + 1 .. r].
- Note que, c termina na posição que ele deve ocupar no vetor ordenado,
  - ou seja, ordem de c é i.
- Além disso, todo elemento com ordem menor que i está em v[p .. i - 1]
  - e todo elemento com ordem maior que i está em v[i + 1 .. r].

Por isso, podemos projetar um algoritmo para o problema da seleção,

- que começa separando o vetor ao redor de um pivô,
    - e então decide em qual subvetor deve continuar a busca pelo k-ésimo.

```c
// baseado no quickSort determinístico
// p indica a primeira posicao e r a ultima
int selecao3(int v[], int p, int r, int k) {
    int j;
    j = separa(v, p, r);
    if (k == j)
        return v[j];
    if (k < j)
        return selecao3(v, p, j - 1, k);
    // if (k > j)
    return selecao3(v, j + 1, r, k);
}
```

- Note que, não é necessário ajustar a ordem do elemento buscado
    - mesmo quando ele está no segundo subvetor, pois
        - a rotina separa devolve a posição do elemento no vetor original.
- Eficiência de tempo: O(n^2) no pior caso.



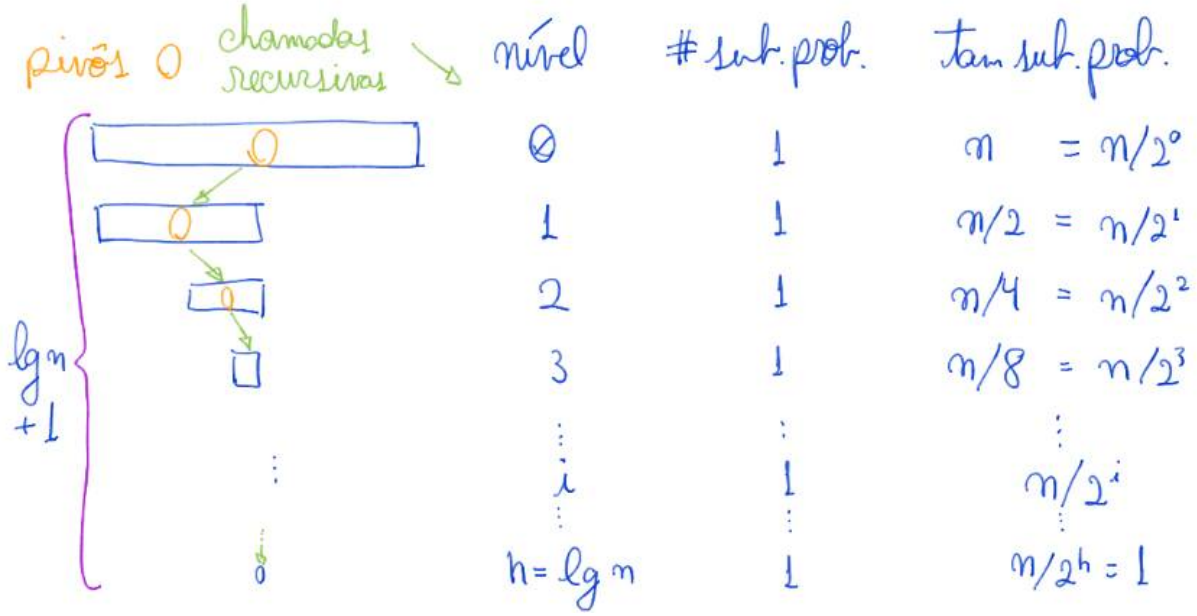
    - Note que, o trabalho por nível é proporcional
        - ao tamanho do subproblema.
    - Por isso, o trabalho total é proporcional a
        - n + (n - 1) + (n - 2) + … + 3 + 2 + 1 = n (n - 1) / 2 ~= n^2 / 2.
- Eficiência de espaço: O(n) espaço adicional,
    - por conta da altura da pilha de recursão.

Para evitar esse pior caso, precisamos de bons pivôs.

- Assim como no caso do quickSort,
    - usaremos aleatoriedade para conseguir bons pivôs em média.

```c
// baseado no quickSort aleatorizado
// p indica a primeira posicao e r a ultima
int selecao4(int v[], int p, int r, int k) {
    int desl, j;
    desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r - p
+ 1));
    troca(&v[p + desl], &v[r]);
    j = separa(v, p, r);
    if (k == j)
        return v[j];
    if (k < j)
        return selecao4(v, p, j - 1, k);
    // if (k > j)
    return selecao4(v, j + 1, r, k);
}
```

- Eficiência de tempo esperado: O(n)



    - Note que, o trabalho por nível é proporcional
        - ao tamanho do subproblema.
    - Por isso, o trabalho total é proporcional a
        - n + n/2 + n/4 + … <= 2n.
    - Claro que, em média, nem todo pivô dividirá o vetor ao meio,
        - mas em média a cada dois pivôs, um será bom,
            - mantendo o resultado a menos de uma constante.
- Eficiência de espaço esperado: O(lg n) espaço adicional,
    - por conta da altura da pilha de recursão.

Observe que, o algoritmo recursivo anterior apresenta recursão caudal,

- o que nos permite transformá-lo em um algoritmo iterativo.

```
int selecao5(int v[], int p, int r, int k) {
    while (1) {
        int desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) *
(double)(r - p + 1));
        troca(&v[p + desl], &v[r]);
        int j = separa(v, p, r);
        if (k == j) return v[j];
        if (k < j) r = j - 1;
        else /* if (k > j) */ p = j + 1;
    }
}
```

- Eficiência de tempo esperado: O(n)
- Eficiência de espaço: O(1) espaço adicional,
    - já que o número de variáveis auxiliares independe da entrada.

Podemos refinar esta versão iterativa,

- colocando a condição de parada no do { } while( )
- e removendo os limites do vetor dos parâmetros.

```
int selecao6(int v[], int n, int k) {
    int p = 0;
    int r = n - 1;
    do {
        int desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) *
(double)(r - p + 1));
        troca(&v[p + desl], &v[r]);
        int j = separa(v, p, r);
        if (k < j) r = j - 1;
        else /* if (k > j) */ p = j + 1;
    } while (k != j);
    return v[j];
}
```

- Invariantes e corretude:
    - v[0 .. p - 1] <= v[p .. r] <= v[r + 1 .. n - 1],
    - Depois do separa(), v[j] corresponde ao j-ésimo elemento.
- Eficiência de tempo esperado: O(n)
- Eficiência de espaço: O(1) espaço adicional,
    - já que o número de variáveis auxiliares independe da entrada.

Quizz: Todas as nossas adaptações de algoritmos para seleção são de algoritmos

- que colocam alguns elementos em suas posições definitivas,
    - muito antes do vetor todo estar ordenado. Será coincidência?

Problema da Contagem de Inversões

Definição:

- Uma inversão é um par de elementos v[i] e v[j], tal que i < j e v[i] > v[j].
- Dado um vetor v de tamanho n, quantas inversões existem em v?

Exemplos:

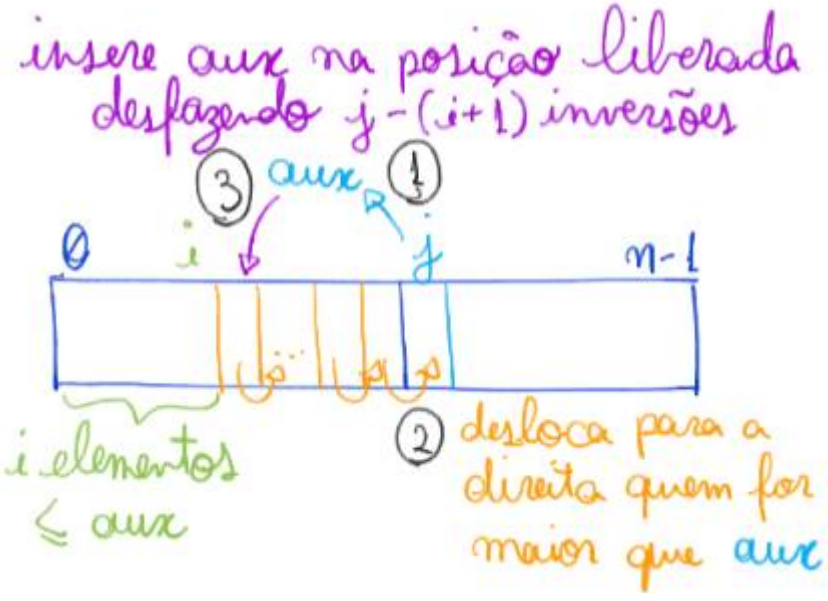
- 3 2 5 4 1
  - 3 está invertido com 2 e 1
  - 2 está invertido com 1
  - 5 está invertido com 4 e 1
  - 4 está invertido com 1
  - Total de inversões = 2 + 1 + 2 + 1 = 6
- 1 2 3 4 5
  - Total de inversões = 0
- 5 4 3 2 1
  - 5 está invertido com 4, 3, 2 e 1
  - 4 está invertido com 3, 2 e 1
  - 3 está invertido com 2 e 1
  - 2 está invertido com 1
  - Total de inversões = 4 + 3 + 2 + 1

Curiosidades:

- Número mínimo de inversões = 0,
  - que ocorre quando o vetor está em ordem crescente.
- Número máximo de inversões = (n escolhe 2) = n(n - 1)/2.
  - O valor (n escolhe 2) corresponde a todo par ser uma inversão,
    - ocorre quando o vetor está em ordem decrescente.
- Assim, podemos pensar no número de inversões
  - como uma medida da desordem dos elementos de um vetor.

Em AED1, vimos um algoritmo baseado na ideia do insertionSort,

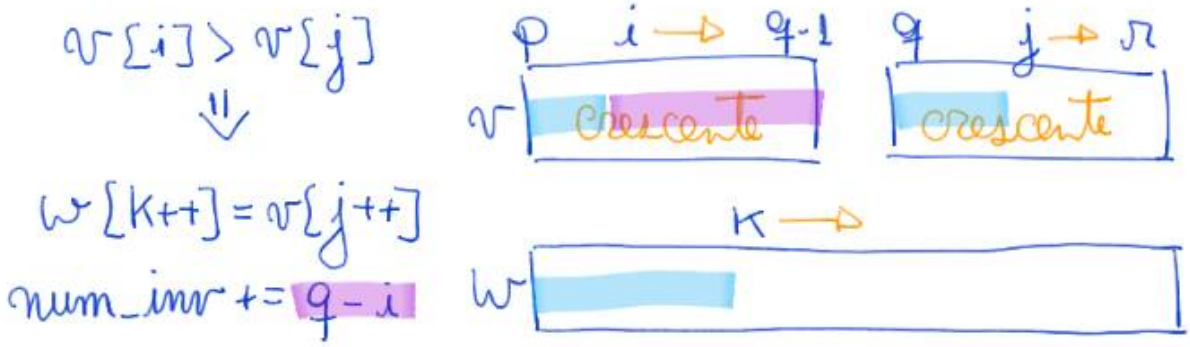
- com eficiência O(n^2) no pior caso.



- Também vimos um algoritmo baseado na ideia do bubbleSort,
  - que conta +1 cada vez que desfaz uma inversão.

Vamos tentar obter um algoritmo mais eficiente para este problema,

- nos inspirando no mergeSort e, em particular, na rotina de intercalação.




```c
// primeiro subvetor entre p e q-1, segundo subvetor entre q e r-1
unsigned long long intercalaContando(int v[], int p, int q, int r) {
    int i, j, k, tam;
    unsigned long long num_inv = 0;
    i = p;
    j = q;
    k = 0;
    tam = r - p;
    int *w = malloc(tam * sizeof(int));
    while (i < q && j < r) {
        if (v[i] <= v[j])
            w[k++] = v[i++];
        else { // v[i] > v[j]
            w[k++] = v[j++];
            num_inv += q - i;
        }
    }
    while (i < q)
        w[k++] = v[i++];
    while (j < r)
        w[k++] = v[j++];
    for (k = 0; k < tam; k++)
        v[p + k] = w[k];
    free(w);
    return num_inv;
}
```

- Invariante e corretude:
  - w[0 .. k - 1] ordenado e possui os elementos de v[0 .. i - 1] e v[q .. j - 1].
  - num_inv = número de inversões envolvendo
    - elementos de v[q .. j - 1] e elementos de v[0 .. q - 1].
- Eficiência de tempo: O(r - p).
- Eficiência de espaço: O(r - p) espaço adicional, por conta do vetor auxiliar.

Usando essa variante da rotina de intercalação

- que devolve o número de inversões que ela desfez ao intercalar,
    - podemos projetar uma variante do mergeSort,
        - que conta o número de inversões enquanto ordena o vetor.

```
// baseado no mergeSort
// p indica a primeira posicao e r-1 a ultima
unsigned long long contarInversoesR(int v[], int p, int r) {
    int m;
    unsigned long long num_inv = 0;
    if (r - p > 1) {
        m = (p + r) / 2; // m = p + (r - p) / 2;
        num_inv += contarInversoesR(v, p, m);
        num_inv += contarInversoesR(v, m, r);
        num_inv += intercalaContando(v, p, m, r);
    }
    return num_inv;
}
```

- Eficiência de tempo: O((r - p) lg (r - p)).
- Eficiência de espaço: O(r - p) espaço adicional.

```
unsigned long long contarInversoes3(int v[], int n) {
    return contarInversoesR(v, 0, n);
}
```

- Eficiência de tempo: O(n lg n).
- Eficiência de espaço: O(n) espaço adicional.

Quizz: Todas as nossas adaptações de algoritmos para contagem de inversões

- são de algoritmos de ordenação estável. Será coincidência?