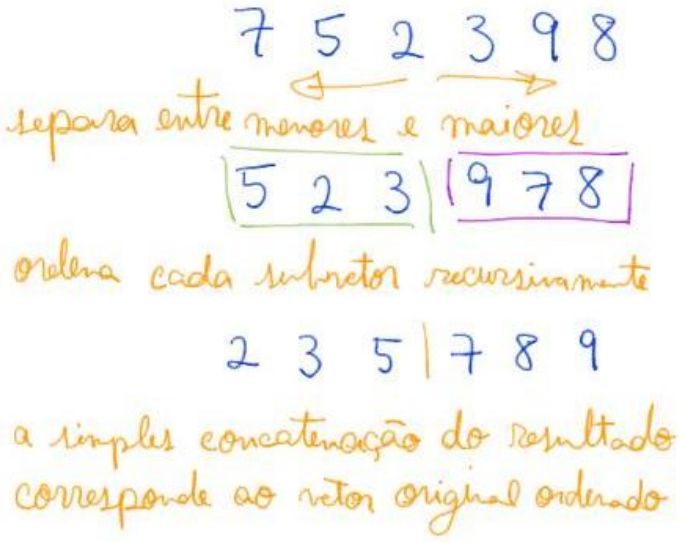
AED2 - Aula 11
Problema da separação e quicksort

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

- Dividir: o problema é dividido em subproblemas menores do mesmo tipo.
- Conquistar: os subproblemas são resolvidos recursivamente, sendo que os subproblemas pequenos são casos base.
- Combinar: as soluções dos subproblemas são combinadas numa solução do problema original.

Ideia e exemplo

- Separar o vetor entre os elementos maiores e menores.
    - Então, ordenar recursivamente cada subvetor resultante da separação
- Como exemplo, considere o vetor 7 5 2 3 9 8



Dificuldade: Como definir os maiores e os menores?

- Num algoritmo de ordenação baseado em comparações
    - só podemos falar de menor ou maior relativo a outro elemento.
- Por isso, usaremos um elemento do vetor como referência,
    - que chamaremos de pivô.
- Depois veremos como escolher esse elemento adequadamente.

Código quicksort recursivo:

```
// p indica a primeira posicao e r a ultima
void quicksortR(int v[], int p, int r)
{
```

```
    int i;
    if (p < r) // se vetor corrente tem mais de um elemento
    {
        i = separa2(v, p, r); // i é a posição do pivô após a
separação
        quicksortR(v, p, i - 1);
        quicksortR(v, i + 1, r);
    }
}
```

Note que, no quicksort a maior parte do trabalho é feita pela função de separação,

- na fase de divisão em subproblemas,
    - que ocorre antes das chamadas recursivas.

Isso é complementar ao algoritmo mergesort,

- que realiza a maior parte do trabalho na fase de combinação das soluções,
    - através da função de intercalação.

Por isso, podemos dizer que o mergesort ordena o vetor “de baixo para cima”,

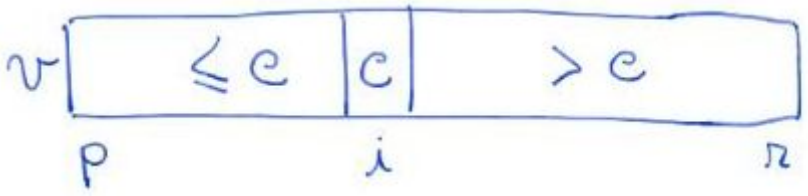
- enquanto o quicksort o ordena “de cima para baixo”.
    - Isso fica mais claro se considerarmos a execução dos algoritmos
        - ilustrada numa árvore de recursão.

Assim como o algoritmo para o problema da intercalação é central no mergesort,

- o algoritmo para o problema da separação é central no quicksort.
    - Vamos entender melhor esse problema
        - e projetar algoritmos eficientes para ele.

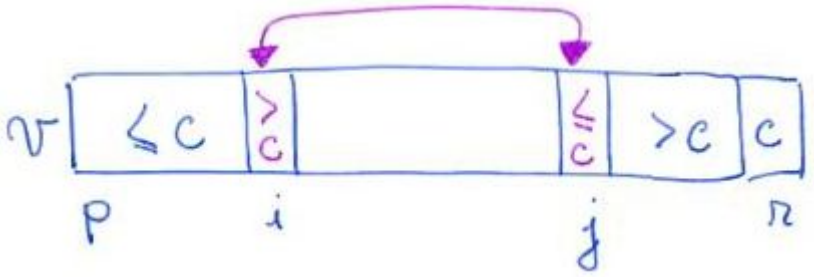
O problema da separação consiste de,

- dado um vetor v com limites p e r,
    - i.e., os elementos do vetor estão em v[p .. r],
        - e um pivô c que está em v[p .. r],
- separar os elementos do vetor de modo que
    - o prefixo deste tenha os elementos <= c,
    - e o sufixo tenha os elementos > c.



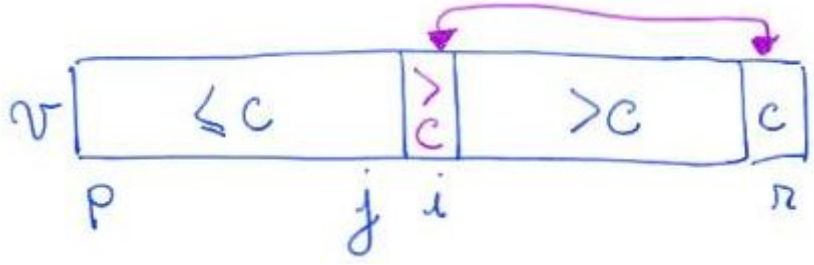
- Isto é, c deve terminar numa posição i tal que
    - v[p .. i - 1] <= c = v[i] < v[i + 1 .. r].
- Note que, c termina na posição que ele deve ocupar no vetor ordenado.

Uma ideia para um algoritmo de separação, exemplificado na seguinte figura,



consiste de:

- Escolher o pivô c = v[r].
- Começar com um índice i em p e ir incrementando-o enquanto v[i] <= c.
- Começar com outro índice j em r - 1 e ir decrementando-o enquanto v[j] > c.
- Quando ambos os índices param de avançar, temos
    - v[i] > c e v[j] <= c.
- Neste caso, troca v[i] com v[j] e volta a avançar os índices.
- Para o processo quando i >= j,
    - caso em que fazer a troca não tem mais sentido.



- Então troca v[i] com v[r] e devolve i.

Código primeiro algoritmo da separação:

```c
// separa v[p .. r] e devolve a posição do pivô
int separa1(int v[], int p, int r)
{
    int i = p, j = r - 1, c = v[r]; // c é o pivô
    while (1)
    {
        while (i < r && v[i] <= c)
            i++;
        while (j > i && v[j] > c)
            j--;
```

```
        if (i >= j)
            break;
        troca(&v[i], &v[j]);
        // i++;
        // j--;
    }
    troca(&v[i], &v[r]);
    return i;
}
```

Invariantes e corretude do separa1:

- No início de cada iteração do laço temos
  - v[p .. r] é uma permutação do vetor original,
  - v[p .. i - 1] <= c,
  - v[j + 1 .. r - 1] > c,
  - c = v[r].
- Note que, quando o algoritmo sai do laço principal temos i >= j.
  - Portanto, todo o vetor está separado, exceto por c na posição r,
    - i.e., v[p .. i - 1] <= c < v[i .. r - 1] e v[r] = c,
  - de modo que v[i] é o elemento mais à esquerda que é maior do que c.
- Assim, trocando v[i] com v[r] chegamos à solução.

Eficiência de tempo do separa1:

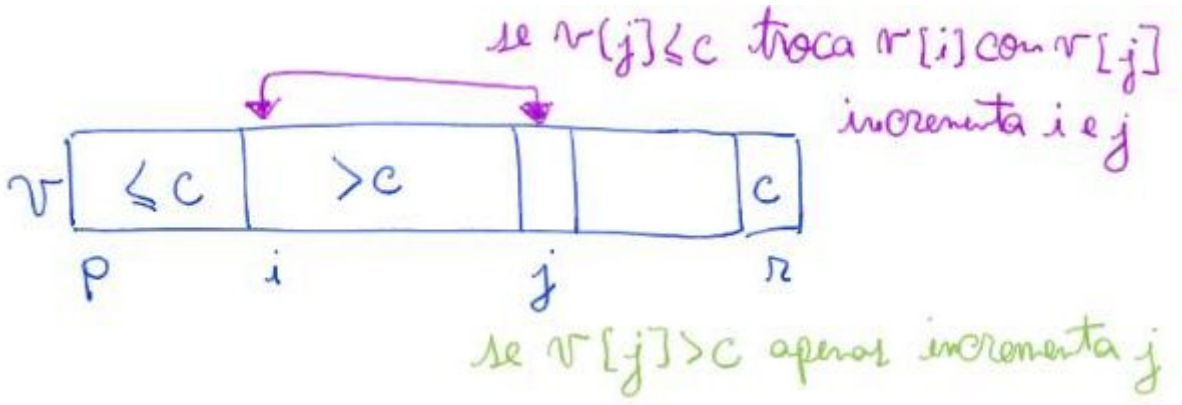
- O número de operações é linear no tamanho do subvetor sendo intercalado,
  - i.e., O(r - p).
- Para verificar isso, note que
  - no início i = p e j = r - 1,
  - em cada iteração dos laços internos
    - i é incrementado ou j é decrementado,
  - e o laço principal termina quando i >= j.

Eficiência de espaço do separa1:

- O(1), pois o número de variáveis auxiliares é constante.

Uma maneira diferente de resolver o problema da separação

- é exemplificada na seguinte figura



- e implementada, de forma sucinta, no seguinte código:

```c
// separa v[p .. r] e devolve a posição do pivô
int separa2(int v[], int p, int r)
{
    int i, j, c = v[r]; // c é o pivô
    i = p;
    for (j = p; j < r; j++)
        if (v[j] <= c)
        {
            troca(&v[i], &v[j]);
            i++;
        }
    troca(&v[i], &v[r]);
    return i;
}
```

Invariantes e corretude do separa2:

- No início de cada iteração do laço temos
  - v[p .. r] é uma permutação do vetor original,
  - v[p .. i - 1] <= c < v[i .. j - 1], v[r] = c,
  - p <= i <= j <= r.
- Note que, como ao fim da última iteração j = r,
  - os invariantes implicam que a separação é realizada corretamente,
    - i.e., v[p .. i - 1] <= c < v[i .. r - 1] e v[r] = c,
- faltando apenas trocar o elemento em v[i] com v[r] e devolver i.

Eficiência de tempo do separa2:

- O número de operações é linear no tamanho do subvetor sendo intercalado,
  - ou seja, O(r - p).
- Para verificar isso, note que o laço realiza r - p iterações,

- realizando trabalho constante em cada iteração.

Eficiência de espaço do separa2:

- O(1), pois o número de variáveis auxiliares é constante.

Relembrando o código do quickSort:

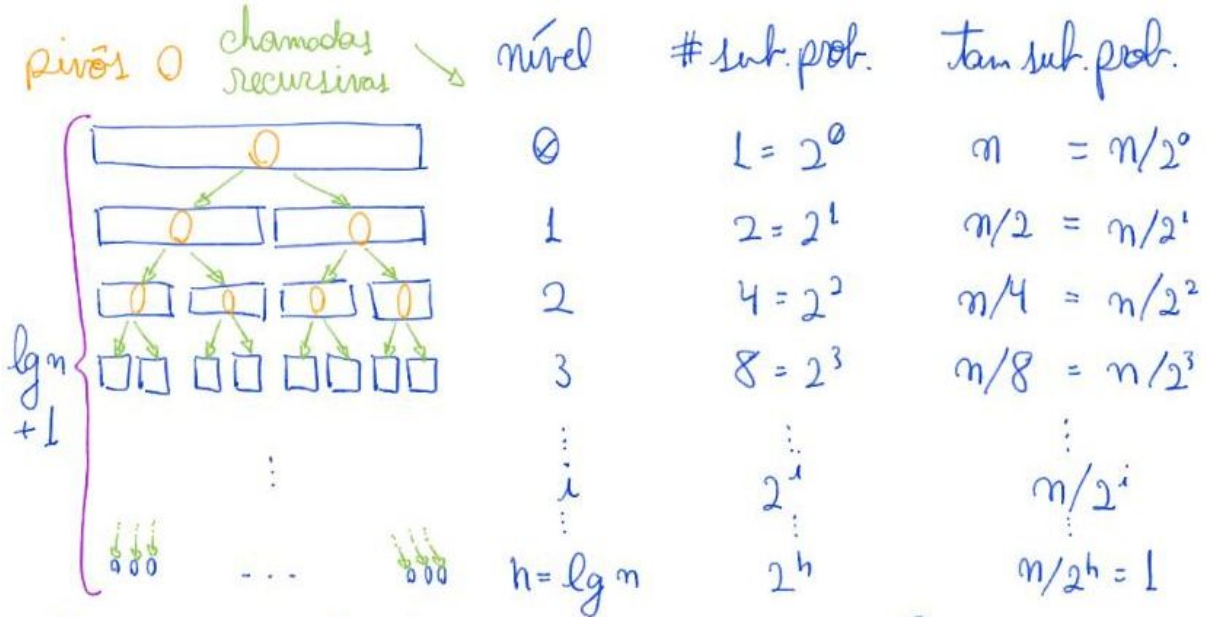
```c
// p indica a primeira posicao e r a ultima
void quicksortR(int v[], int p, int r)
{
    int i;
    if (p < r) // se vetor corrente tem mais de um elemento
    {
        i = separa2(v, p, r); // j é a posição do pivô após a
separação
        quicksortR(v, p, i - 1);
        quicksortR(v, i + 1, r);
    }
}
```

Eficiência de tempo do quicksort:

- Vamos comparar melhor caso, pior caso e caso médio.

Melhor caso:

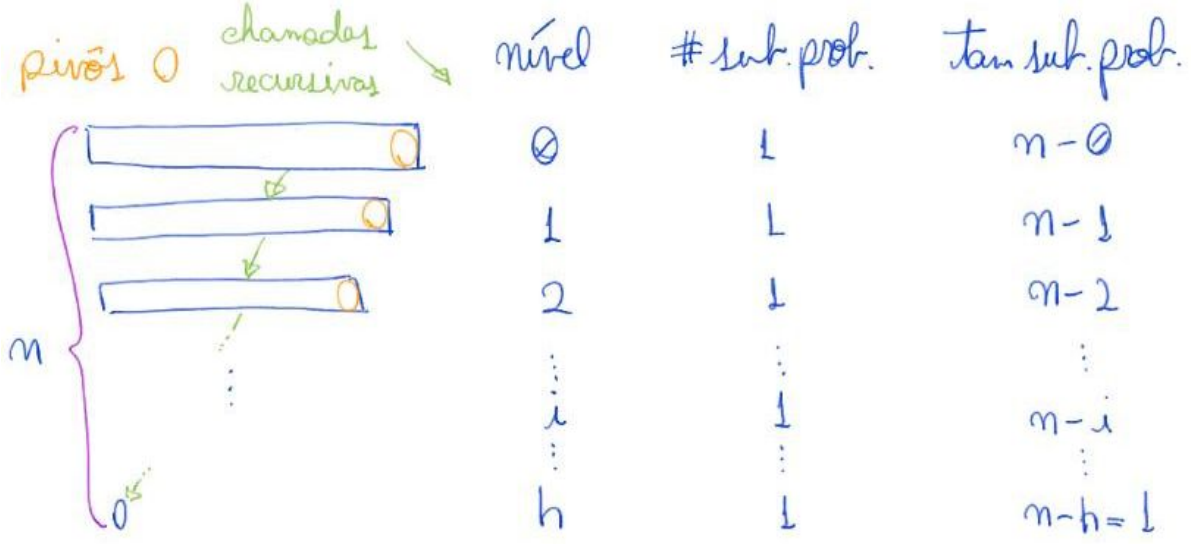
- Pivô sempre divide o vetor ao meio e número de operações é O(n lg n).
- Para chegar a esse resultado, construa uma árvore de recursão



    - e observe que no nível l temos
        - 2^l subproblemas
        - e o vetor de cada subproblema tem tamanho n / 2^l.
- Como o trabalho das funções de separação
    - é linear no tamanho do vetor de entrada
        - o trabalho por subproblema é const * (n/2^l),
            - para alguma constante const.
- Assim, trabalho total no nível l é
    - 2^l * const * (n / 2^l) = const * n,
        - i.e., o trabalho é proporcional a n em todo nível.
- Como, no último nível h, por conta do caso base,
    - o tamanho dos subproblemas é 1,
        - temos n / 2^h = 1 ⇒ 2^h = n ⇒ h = lg n.
- Portanto, o número de níveis é (1 + lg n),
    - já que começamos a contar os níveis em 0,
- e Trabalho Total = const * n * (1 + lg n) = O(n lg n).

Pior caso:

- Pivô sempre é o menor ou maior elemento do vetor
    - e número de operações é O(n^2).
- Para chegar a esse resultado, observe que cada chamada recursiva
    - terá apenas um subproblema não trivial (tamanho vetor > 0)
    - e o vetor deste subproblem não trivial
        - será apenas uma unidade menor que o anterior.



- Assim, teremos 1 subproblema por nível
    - e tamanho do subproblema no nível l será n - l.
- Por isso, o trabalho no nível l será const * (n - l).
- O total de níveis será n, já que no último nível h temos
    - tamanho do subproblema = 1 = (n - h) ⇒ h = n - 1,

        - e começamos a contar os níveis em 0.
- Assim, o trabalho total será a soma dos termos de uma PA
    - const * [n + (n - 1) + (n - 2) + … + 2 + 1] =
        - = const * n * (n + 1) / 2 ~= const * (n^2) / 2 = O(n^2).

Caso médio:

- Quando lidando com vetores que são permutações aleatórias,
    - a ordem do número de operações fica próxima do melhor caso,
        - i.e., O(n lg n).
- No entanto, a eficiência do quicksort determinístico
    - depende da entrada ter uma distribuição de valores favorável.
- Para não depender disso, podemos aleatorizar a escolha do pivô.
    - Com a aleatorização o tempo esperado do algoritmo é O(n lg n).
- Importante destacar que, no caso do algoritmo aleatorizado
    - a eficiência depende apenas de suas escolhas aleatórias,
        - e não da configuração do vetor de entrada.

Código quicksort recursivo aleatorizado:

```
// p indica a primeira posicao e r a ultima
void quicksortRAleat(int v[], int p, int r)
{
    int desl, i;
    if (p < r)
    {
        // desl = rand() % (r - p + 1);
        desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r
- p + 1));
        troca(&v[p + desl], &v[r]);
        i = separa1(v, p, r);
        quicksortRAleat(v, p, i - 1);
        quicksortRAleat(v, i + 1, r);
    }
}
```

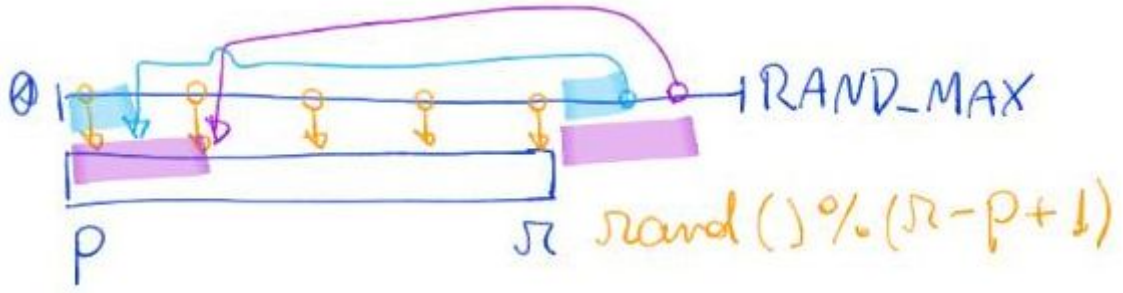
Funções de aleatorização:

- A função rand(),
    - definida na biblioteca stdlib.h,
    - gera um número inteiro pseudo-aleatório
        - no intervalo [0 .. RAND_MAX].

- Primeira opção

```
        desl = rand() % (r - p + 1);
```

  - Obtém um número inteiro no intervalo [0, r - p],
    - pegando o resto da divisão de um inteiro aleatório por (r - p + 1).
  - No entanto, possui um viés que privilegia números pequenos,
    - especialmente se (r - p + 1) tem magnitude de RAND_MAX.



- Segunda opção

```
        desl = (int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r
- p + 1));
```

  - Transforma o inteiro aleatório, obtido de rand(), em um número real
    - no intervalo [0, 1)

```
((double)rand() / (RAND_MAX + 1))
```

  - Depois, transforma esse real em um número
    - no intervalo [0, r - p + 1)

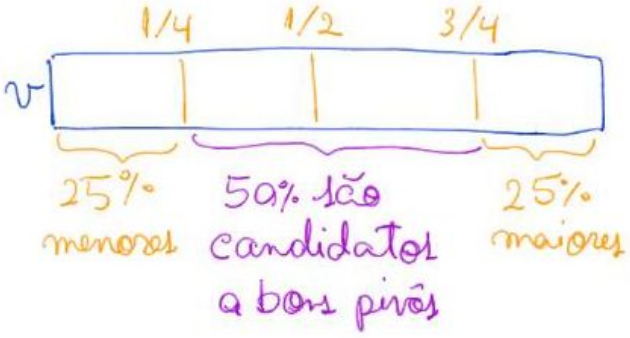
```
(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r - p + 1))
```

  - Então, transforma esse real num inteiro
    - no intervalo [0, r - p]

```
(int)(((double)rand() / (RAND_MAX + 1)) * (double)(r - p + 1))
```

Eficiência de tempo esperada do quicksort aleatorizado:

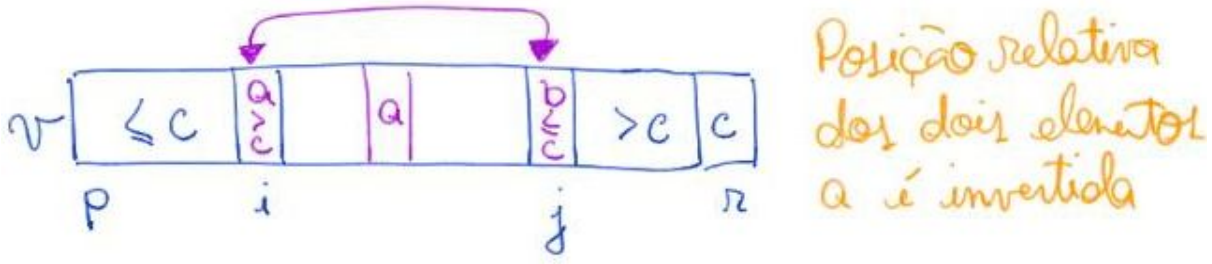
- Como dito antes, é da ordem de n lg n,
  - i.e., O(n lg n).
- Numa análise superficial, isso ocorre porque, em média,
  - a cada duas escolhas aleatórias do pivô, será escolhido
    - um pivô “bom”, que divide o vetor próximo da metade.



    - É um cenário parecido com, a cada dois lances de moeda,
        - se espera obter uma cara.
- Com um pivô “bom” a cada dois, o resultado será uma árvore
    - parecida com a do melhor caso,
        - mas com um pouco mais que o dobro de níveis.
    - Aproximadamente 3,41 * (lg n + 1) níveis.

Estabilidade:

- Ordenação do quicksort não é estável,
    - i.e., ele pode inverter a ordem relativa de elementos iguais.
- Isto acontece porque a rotina de separação troca elementos,
    - nas posições i e j,
        - que estão separados por um intervalo.



- Assim, se existir um elemento x nesse intervalo,
    - tal que x = v[i] ou x = v[j],
    - a ordem relativa destes elementos será invertida.

Eficiência de espaço:

- Quicksort não usa vetor auxiliar,
    - o que levaria a classificá-lo como in place.
- No entanto, cada nova chamada recursiva
    - ocupa um pouco de memória da pilha de execução.
- Assim, quicksort ocupa memória adicional
    - proporcional à altura da pilha de execução,
        - que é igual à altura (número de níveis)
            - das árvores de recursão em nossas análises.
    - Ou seja, altura = O(n) no pior caso
        - e altura = O(lg n) no melhor caso e caso médio.
- Portanto, o uso de memória cresce de acordo com o tamanho da entrada.
    - Por isso podemos dizer que quicksort não é propriamente in place.
- O uso de memória adicional proporcional a lg n,
    - não costuma ser crítico.
- Já, pilhas de execução de altura proporcional a n podem dar problema
    - em caso de n grande.

Melhorando eficiência de espaço:

- Uma alternativa para garantir que o quicksort,
    - tanto na versão determinística quanto na probabilística,
- nunca chegue a produzir uma pilha de execução maior que lg n
    - é sempre fazer a primeira chamada recursiva no menor subvetor,
        - que terá tamanho <= que metade do vetor anterior
    - e substituir a segunda chamada recursiva
        - por uma versão iterativa.
- Para tanto, é introduzido um laço principal e
    - onde estaria a segunda chamada recursiva, é feita a atualização
        - dos índices para corresponderem ao novo subvetor.
- Vale destacar que isso só é possível porque
    - a segunda chamada recursiva do quicksort
        - é a última operação realizada na função.
- Isso caracteriza um caso de recursão caudal, a qual
    - pode ser convertida sistematicamente em um algoritmo iterativo.

O seguinte algoritmo implementa essa ideia na versão determinística do quicksort:

```
void quicksortRSemiIter(int v[], int p, int r)
{
    int i;
    while (p < r)
    {
        i = separa1(v, p, r);
        if (i - p < r - i) // se o subvetor esquerdo é menor
        { // ordena recursivamente o subvetor esquerdo
            quicksortRSemiIter(v, p, i - 1);
            p = i + 1;
        }
        else // se o subvetor direito é menor
        { // ordena recursivamente o subvetor direito
            quicksortRSemiIter(v, i + 1, r);
            r = i - 1;
        }
    }
}
```

Exercício:

- Uma última observação é que a eficiência do quicksort

    - pode ser comprometida se houverem muitos elementos repetidos.
- Nesse caso, mesmo a versão aleatorizada
    - pode escolher muitos pivôs ruins.
        - Construa um cenário em que isso acontece com quickSortR.
- Para evitar esse problema usamos o 3-way quickSort,
    - que divide o vetor entre menores, iguais e maiores que o pivô.
        - Implemente essa versão do quickSort.

Animação:

- Visualization and Comparison of Sorting Algorithms - www.youtube.com/watch?v=ZZuD6iUe3Pc