AED2 - Aula 06
Skip lists

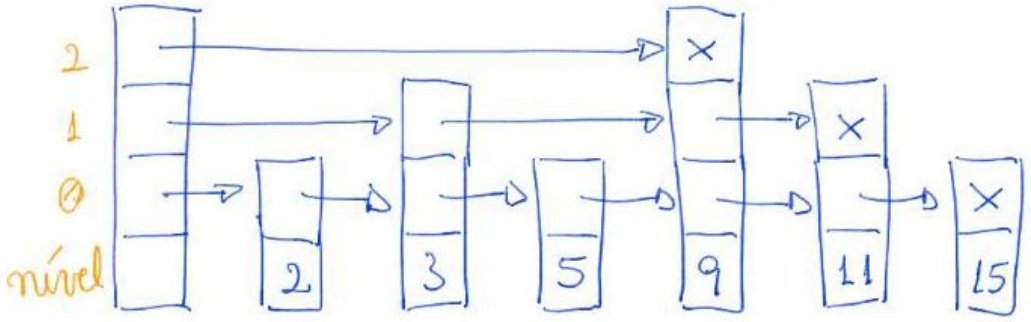
Considere usar uma lista ligada ordenada

- para implementar uma tabela de símbolos.
    - Essa abordagem não é eficiente, pois localizar um registro
        - leva tempo proporcional ao tamanho da lista.

A ideia da estrutura de dados Skip List é

- usar uma hierarquia de listas ligadas ordenadas,
    - em que cada lista tem uma densidade de itens própria,
- sendo que as listas estão conectadas entre si.

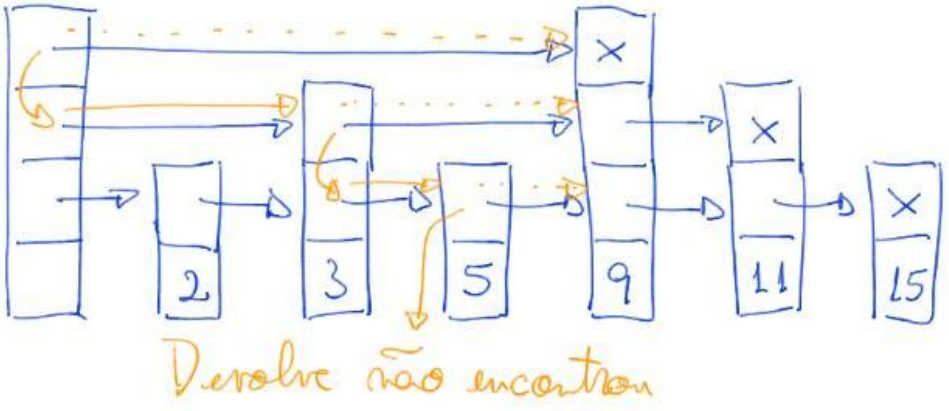
Exemplo:



Ideia da busca:

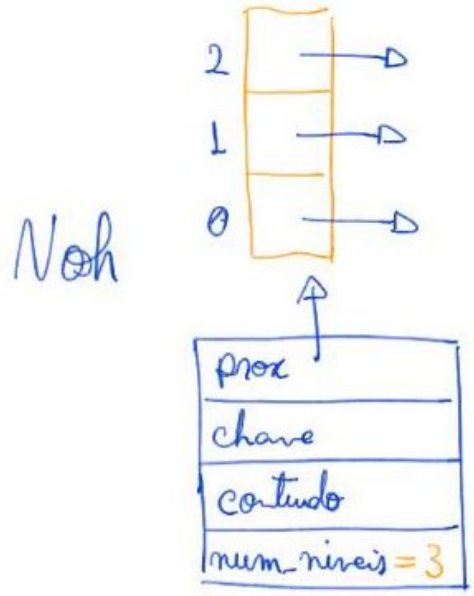
- Começar a percorrer a lista de maior nível,
    - que é a que tem menos itens.
- Quando encontrar o fim da lista
    - ou um item com chave maior do que a buscada,
        - continua a busca no nível abaixo,
            - que tem mais itens.

Exemplo de busca pela chave 8:



Antes de analisarmos o código da busca,

- vamos entender a estrutura dos nós:




```c
#define num_max_niveis 100

typedef int Chave;
typedef int Item;

typedef struct noh
{
   Chave chave;
   Item conteudo;
   struct noh **prox;
   int num_niveis;
} Noh;

static Noh *lista;
static int num_itens, nivel_max;
```

Código da busca:

```c
Noh *buscaR(Noh *t, Chave chave, int nivel)
{
   if (t != lista && chave == t->chave)
       return t;
```

```
    if (t->prox[nivel] == NULL || chave < t->prox[nivel]->chave)
    {
        if (nivel == 0)
            return NULL;
        return buscaR(t, chave, nivel - 1);
    }
    return buscaR(t->prox[nivel], chave, nivel);
}

Noh *TSbusca(Chave chave)
{
    return buscaR(lista, chave, nivel_max);
}
```

Eficiência de tempo:

- Busca em skip lists leva, em média,
    - (t log_t n) / 2 = O(log n) comparações,
        - sendo t > 2 o fator de dispersão da skip list,
            - i.e., o número de nós do nível i para o nível i + 1
                - cai, em média, de 1 / t.
- Por ser uma estrutura probabilística, falamos de eficiência média.
    - No entanto, note que essa média depende apenas
        - das escolhas aleatórias da própria estrutura,
            - e não dos valores da entrada.
- Para entender de onde vem o valor (t log_t n) / 2, observe que
    - uma skip list com n itens deve ter log_t n níveis,
        - já que o número de itens cai de 1 / t por nível.
- Além disso, entre dois valores do nível i + 1 devem existir,
    - em média, t valores no nível i.
- Por isso, esperamos dar t / 2 saltos por nível, em média,
    - antes de descer para o nível seguinte.
- O resultado deriva do produto do número esperado de níveis
    - pelo número esperado de saltos por nível.

Eficiência de espaço:

- Skip lists tem, em média,
    - n (t / (t - 1)) = O(n) nós.
- Para entender de onde vem esse valor, observe que,
    - o primeiro nível tem n nós,

    - o segundo tem n/t,
    - o terceiro n/t^2.
- Assim, o número esperado de nós corresponde
    - à soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG)
        - que começa em n e tem razão 1/t.
- Deduzindo a soma dos termos de uma PG de razão < 1 temos
    - SomaPG(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + …
    - q SomaPG(q) = q + q^2 + q^3 + …
    - (1 - q) SomaPG(q) = (1 + q + q^2 + q^3 + …) - (q + q^2 + q^3 + …)
    - SomaPG(q) = 1 / (1 - q).
- Como na nossa PG o primeiro termo é n e a razão é 1/t,
    - sua soma converge para
        - n * 1 / (1 - 1/t) = n / ((t - 1) / t) = n (t / (t - 1)).

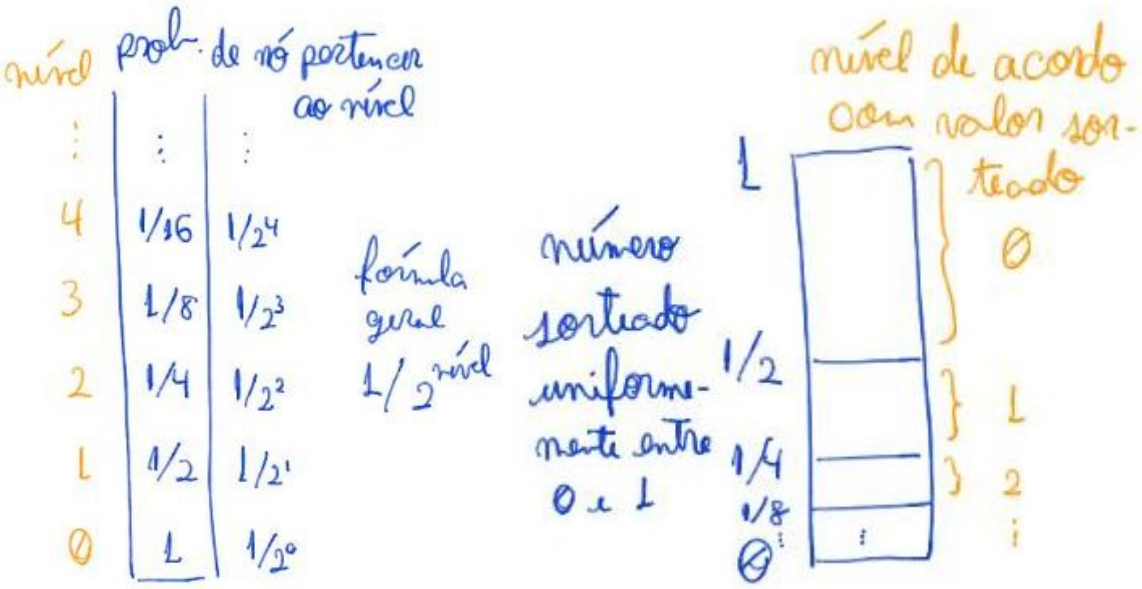
Relação entre tempo e espaço:

- Comparando a eficiência de tempo e de espaço das skip lists, vale notar que
    - a eficiência de tempo (t log_t n) / 2 é O(log n)
    - e a eficiência de espaço n (t / (t - 1)) é O(n),
        - por considerarmos que o fator de dispersão t é fixo.
- Agora, vamos comparar skip lists com diferentes fatores de dispersão.
    - Como exemplo, tome t’ = 2
        - tempo = (t’ log_t’ n) / 2 = (2 lg n) / 2 = lg n
        - espaço = n (t’ / (t’ - 1)) = n (2 / (2 - 1)) = 2 n
    - e compare com t’’ = 10
        - tempo = (t’’ log_t’’ n) / 2 = (10 log_10 n) / 2
            = 5 (lg n / lg 10) ~= 1,5 lg n
        - espaço = n (t’’ / (t’’ - 1)) = n (10 / (10 - 1)) ~= 1,11 n
- Podemos perceber que, quanto maior o t,
    - mais lenta a busca e menos espaço ocupa a skip list,
        - o que é consistente com uma dispersão maior.

Probabilidade:

- A ideia central das skip lists é que
    - a cada novo nível temos menos nós,
        - mais especificamente 1/t do número do nível anterior,
    - e estes devem estar homogeneamente espaçados.
- Para obter tal resultado precisamos utilizar escolhas aleatórias,
    - de modo que um nó pertença ao nível i com probabilidade (1/t)^i.
- Uma ideia para fazer isso é sortear um valor entre 0 e 1
    - e atribuir um nível de acordo com o valor sorteado,
        - como sugerem as seguintes figuras, i.e.,
            - nível 0 se o valor estiver entre 1 e ½

- nível 1 se estiver entre ½ e ¼,
- nível 2, se estiver entre ¼ e ⅛
- ...



- A seguinte função implementa essa ideia

```
int nivelAleatorio()
{
   int nivel, disp_acum, t = 2, v = rand();
   disp_acum = t;
   for (nivel = 0; nivel < num_max_niveis; nivel++)
   {
       if (v > RAND_MAX / disp_acum)
           break;
       disp_acum *= t;
   }
   if (nivel > nivel_max)
       nivel_max = nivel;
   return nivel;
}
```

- Observe que, essa função sorteia um valor v e
  - quanto menor tal valor maior será o nível do nó.
- Note que, no início do laço valem os invariantes
  - disp_acum = t^(nivel + 1) e
  - v / RAND_MAX <= t^nivel.
- Como v = rand() recebe um valor
  - aleatório e uniforme entre 0 e RAND_MAX,

        - o que estamos fazendo é sortear um valor entre 0 e 1
    - e colocando o nó num determinado nivel
        - se o valor sorteado <= 1 / t^nivel,
            - o que ocorre com probabilidade 1 / t^nivel.

Ideia da inserção:

- Sortear um nível para o novo nó,
    - percorrer um caminho semelhante à busca até
        - chegar na posição que o nó deveria ocupar no nível sorteado,
    - então inserir o nó em todas as listas
        - com nível menor ou igual ao dele.

Código da inserção:

```
Noh *novo(Chave chave, Item conteudo, int num_niveis)
{
   int i;
   Noh *p = (Noh *)malloc(sizeof *p);
   p->chave = chave;
   p->conteudo = conteudo;
   p->prox = malloc(num_niveis * sizeof(Noh *));
   p->num_niveis = num_niveis;
   for (i = 0; i < num_niveis; i++)
       p->prox[i] = NULL;
   return p;
}

void insereR(Noh *t, Noh *novoNoh, int nivel)
{
   Chave chave = novoNoh->chave;
   if (t->prox[nivel] == NULL || chave < t->prox[nivel]->chave)
   {
       if (nivel < novoNoh->num_niveis)
       {
           novoNoh->prox[nivel] = t->prox[nivel];
           t->prox[nivel] = novoNoh;
       }
       if (nivel > 0)
```

```
            insereR(t, novoNoh, nivel - 1);
        return;
    }
    insereR(t->prox[nivel], novoNoh, nivel);
}

void TSinsere(Chave chave, Item conteudo)
{
    int nivelAleat = nivelAleatorio();
    Noh *novoNoh = novo(chave, conteudo, nivelAleat + 1);
    insereR(lista, novoNoh, nivel_max);
    num_itens++;
}
```

Eficiência de tempo:

- Inserção leva, em média, (t log_t n) / 2 = O(log n) comparações,
    - sendo t > 2 o fator de dispersão da skip list.

Ideia da remoção:

- A ideia é buscar o nó normalmente,
    - removê-lo de todas as listas com nível menor ou igual ao dele,
- então liberar o nó em si.

Código da remoção:

```
int removeR(Noh *t, Chave chave, int nivel)
{
    Noh *p = t->prox[nivel];
    if (p == NULL || chave <= p->chave)
    {
        if (p != NULL && chave == p->chave)
        {
            t->prox[nivel] = p->prox[nivel];
            if (nivel == 0)
            {
                free(p->prox);
                free(p);
                return 1;
```

```
            }
        }
        if (nivel == 0)
            return 0;
        return removeR(t, chave, nivel - 1);
    }
    return removeR(t->prox[nivel], chave, nivel);
}

void TSremove(Chave chave)
{
    if (removeR(lista, chave, nivel_max))
        num_itens--;
}
```

Eficiência de tempo:

- Inserção leva, em média, (t log_t n) / 2 = O(log n) comparações,
    - sendo t > 2 o fator de dispersão da skip list.

Bônus:

- Observe que, nas várias funções as chamadas recursivas
    - são feitas por último, o que caracteriza recursão caudal.
- Neste caso, é relativamente simples substituir essas chamadas recursivas
    - por um laço, que envolve a função e tem condições de parada
        - complementares ao caso base da recursão,
    - junto da reatribuição de valores para os parâmetros da função
        - nos pontos em que ocorriam as chamadas recursivas.
- Implementar a versão iterativa das funções de manipulação da skip list
    - é um bom exercício.