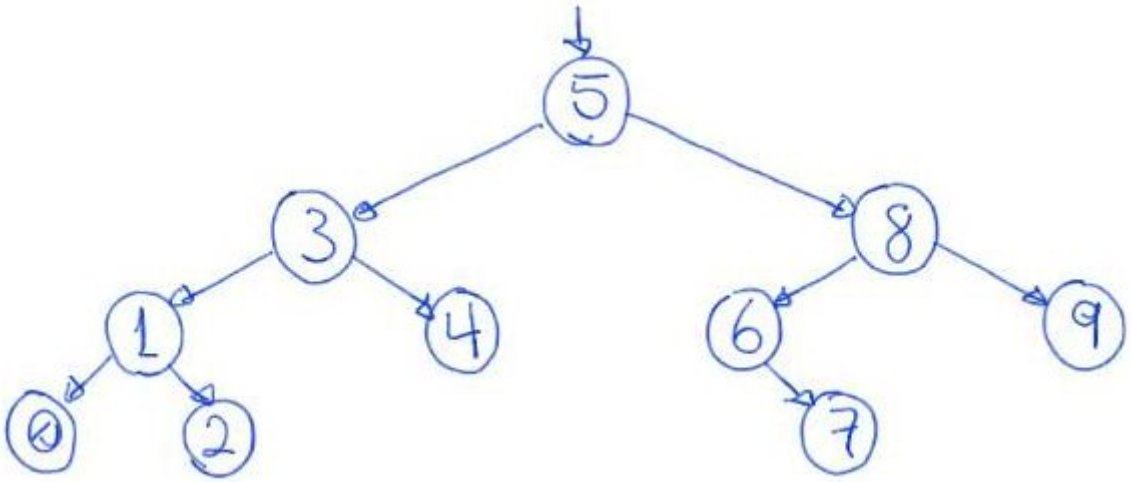
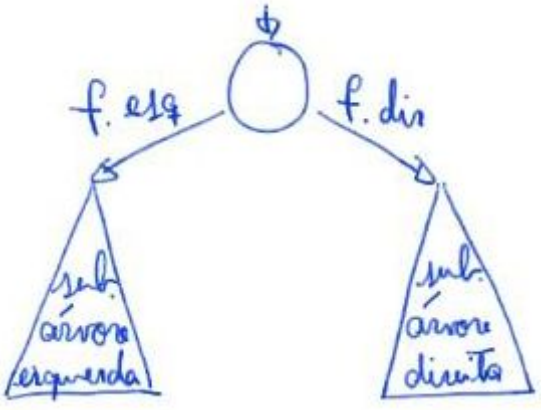
AED1 - Aula 18
Árvores binárias

Exemplo:

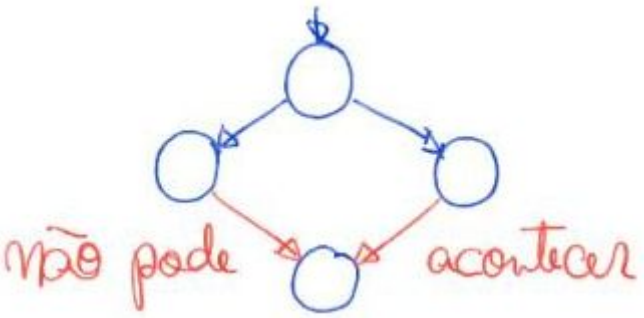


Definição de uma árvore binária:

- Temos a propriedade recursiva, segundo a qual toda árvore binária
    - é um elemento com uma subárvore esquerda e uma subárvore direita



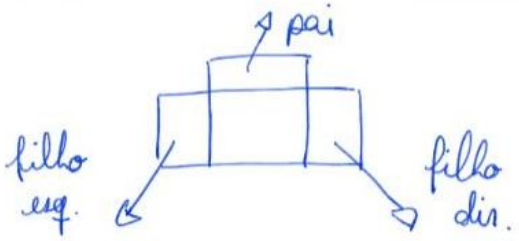
    - ou é uma árvore vazia.
- Adicionamos à propriedade recursiva que
    1. cada elemento de uma árvore tem no máximo um pai,
        a. sendo que o único elemento sem pai é a raiz.
    2. os filhos esquerdo e direito de cada elemento são distintos.
- É interessante verificar quais anomalias essas propriedades evitam
    - como união de caminhos e ciclos.



- Destacamos que,
    - a propriedade recursiva vai nos ajudar a pensar nas operações.

Cada elemento de uma árvore binária é armazenado em um nó,

- implementado como um registro que possui os campos:
    - conteúdo,
    - apontador para o filho esquerdo,
    - apontador para o filho direito,
    - apontador para o pai
        - campo opcional, corresponde ao campo anterior
            - usado em listas duplamente encadeadas,
        - e só precisamos dele para algumas operações.




```c
typedef int Cont;

typedef struct noh {
    Cont conteudo;
    struct noh *pai; // opcional
    struct noh *esq;
```

```
    struct noh *dir;
} Noh;
```

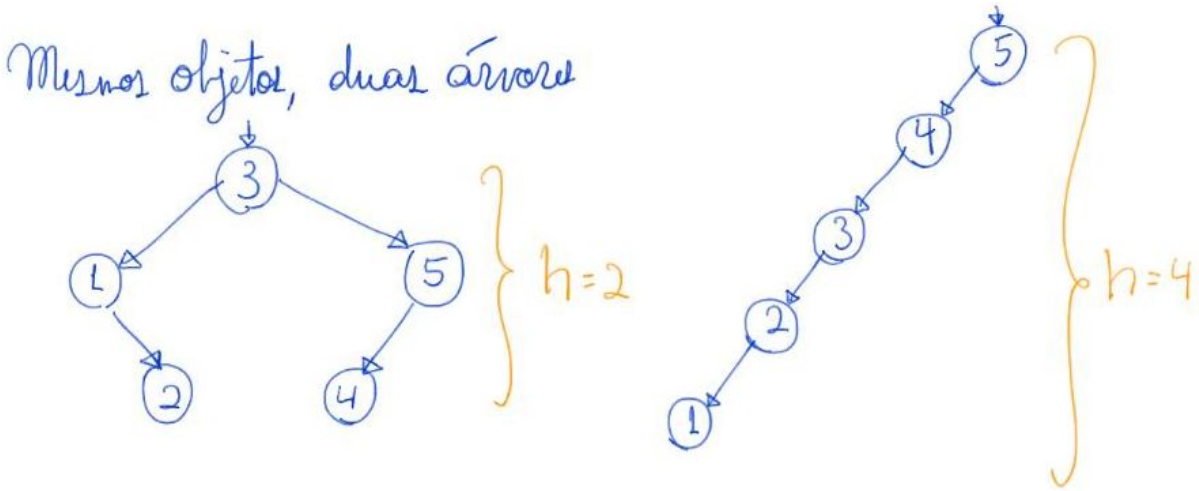
Notação e convenções:

- Usamos o termo **árvore** para nos referir
  - tanto ao conjunto de elementos que compõe uma árvore
  - quanto ao endereço da raiz de uma árvore.
    - Por isso, o uso da definição do tipo Arvore

      ```
      typedef Noh *Arvore;
      ```
- Definimos a **subárvore** de um nó x, como sendo
  - x e seu conjunto de nós descendentes,
    - i.e., todos os nós para os quais existe caminho a partir de x.
  - Também podemos dizer que trata-se da árvore enraizada em x.
- Chamamos de **folhas** os nós da árvore que não tem filhos,
  - i.e., cujos filhos são subárvores vazias.
- Definimos a **altura** de um nó x como sendo
  - o comprimento do maior caminho de x até uma folha de sua subárvore,
    - i.e., o número de saltos entre nós em tal caminho.
- A altura (h) de uma árvore é a altura do nó raiz da mesma.

Vale notar que, árvores binárias diferentes,

- podem armazenar o mesmo conjunto de objetos. Por exemplo:



Observando as árvores anteriores, da esquerda para a direita, temos que:

- O nó com elemento 3 é **raiz** da primeira
  - e o nó 5 é **raiz** da segunda.
- Os nós 2 e 4 são **folhas** da primeira,
  - e o nó 1 é **folha** da segunda.
- A **altura** da primeira é 2
  - e da segunda é 4.

Quiz: Como pudemos observar,

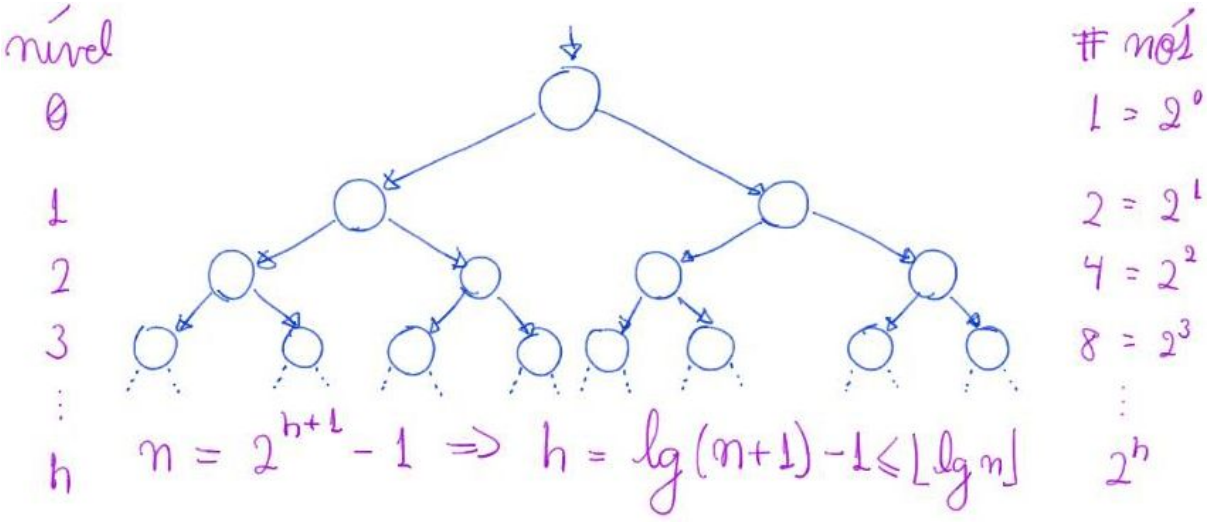
- a altura de uma árvore binária com n nós pode variar muito.
    - Qual a estrutura/formato da árvore binária com maior altura?
    - E da árvore com menor altura?

No pior caso,

- a árvore terá altura n - 1, caso cada nó tenha apenas um filho.
    - Note que esta árvore corresponde a uma lista encadeada.

No melhor caso,

- a altura será ~= lg n, caso seja completa ou quase completa,
    - caso em que todos os níveis estão cheios, exceto talvez o último.



Seja n o # total de nós da árvore

$$n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^h$$

Calculando a soma dos Termos de uma PG de razão 2

(a) $n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^h$

(b) $2 \cdot n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^h + 2^{h+1}$

subtraindo (a) de (b) temos:

$$(2-1)n = (2^1 + \dots + 2^h + 2^{h+1}) - (2^0 + 2^1 + \dots + 2^h)$$

$$n = 2^{h+1} - 1$$

Para calcular a altura de uma árvore, podemos explorar sua estrutura recursiva.

Altura

- se árvore corrente não for vazia
    - obtenha recursivamente a altura da subárvore esquerda,
    - obtenha recursivamente a altura da subárvore direita,
    - devolva 1 mais a altura da maior subárvore.

```
int altura(Arvore r)
{
    int hesq, hdir;
    // atenção para o valor devolvido no caso base
    if (r == NULL)
        return -1;
    hesq = altura(r->esq);
    hdir = altura(r->dir);
    if (hesq > hdir)
        return hesq + 1;
    return hdir + 1;
}
```

- Eficiência de tempo O(n),
    - pois todo nó é visitado uma vez.
- Eficiência de espaço O(altura),
    - por conta da altura máxima da pilha de execução/recursão,
        - que pode crescer tanto quanto a altura da árvore.

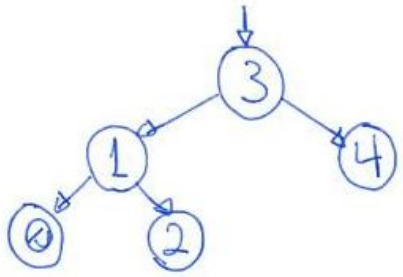
Árvores balanceadas

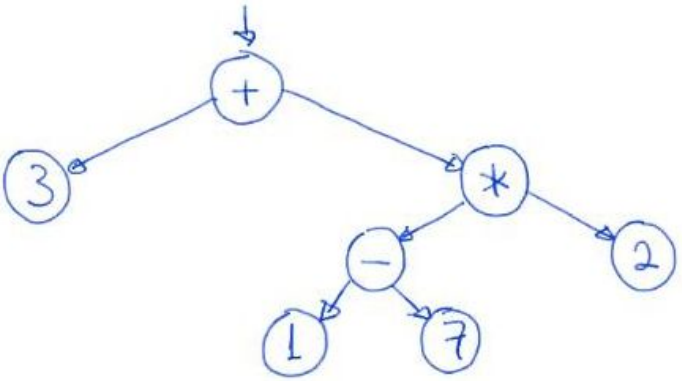
- Uma árvore binária é balanceada
    - se as subárvores esquerda e direita de cada nó
        - tiverem aproximadamente a mesma altura.
- Neste caso, a altura da árvore é da ordem de lg n, i.e., O(log n).
- Isto é importante pois, como veremos em seguida,
    - diversas operações na árvore levam tempo proporcional à altura.
- Infelizmente, é fácil que uma árvore binária fique desbalanceada,
    - conforme ocorrem inserções e remoções.

Agora vamos discutir como implementar algumas operações numa árvore binária

- e vamos avaliar a eficiência das mesmas.
    - Atentem que diversas operações não utilizam o campo pai.

Exemplos para percursos:





Percurso in ordem

- se árvore corrente não for vazia
    - chame recursivamente “percurso in ordem” para subárvore enraizada no filho esquerdo
    - devolva objeto da raiz
    - chame recursivamente “percurso in ordem” para subárvore enraizada no filho direito

```
void inOrdem(Arvore r)
{
    if (r != NULL)
    {
        inOrdem(r->esq);
        printf("(%d) ", r->conteudo);
        inOrdem(r->dir);
    }
}
```

- Esta forma de varredura de árvore é chamada de inordem
    - pois a raiz de cada subárvore é visitada entre os filhos.
- Também é conhecida por e-r-d,
    - referência à esquerda-raiz-direita.
- Para implementar este percurso sem usar recursão,
    - precisamos usar uma pilha.

```
void inOrdemI(Arvore r)
{
    Noh *p;
    Noh *pilha[100];
    int topo = 0; // inicializa a pilha
    p = r;        // começa pela raiz
    // enquanto nó corrente não for nulo
```

```
    // e ainda houverem nós por imprimir na pilha
    while (p != NULL || topo > 0)
    {
        if (p != NULL)
        {
            pilha[topo++] = p; // empilha p
            p = p->esq;        // visita filho esquerdo de p
        }
        else
        {
            p = pilha[--topo]; // desempilha
            printf("(%d) ", p->conteudo);
            p = p->dir; // visita o filho direito de p
        }
    }
}
```

- Eficiência de tempo O(n),
    - pois todo nó é visitado uma vez.
- Eficiência de espaço O(altura),
    - por conta da altura máxima da pilha (seja de recursão ou explícita),
        - que pode crescer tanto quanto a altura da árvore.

Existem outras formas de percurso, como:

- pós-ordem ou e-d-r,
    - em que a raiz é visitada depois dos filhos

```
void posOrdem(Arvore r)
{
    if (r != NULL)
    {
        posOrdem(r->esq);
        posOrdem(r->dir);
        printf("%d\n", r->conteudo);
    }
}
```

    - Notam uma relação com notação pós-fixa?
- Pré-ordem ou r-e-d,
    - em que a raiz é visitada antes dos filhos.

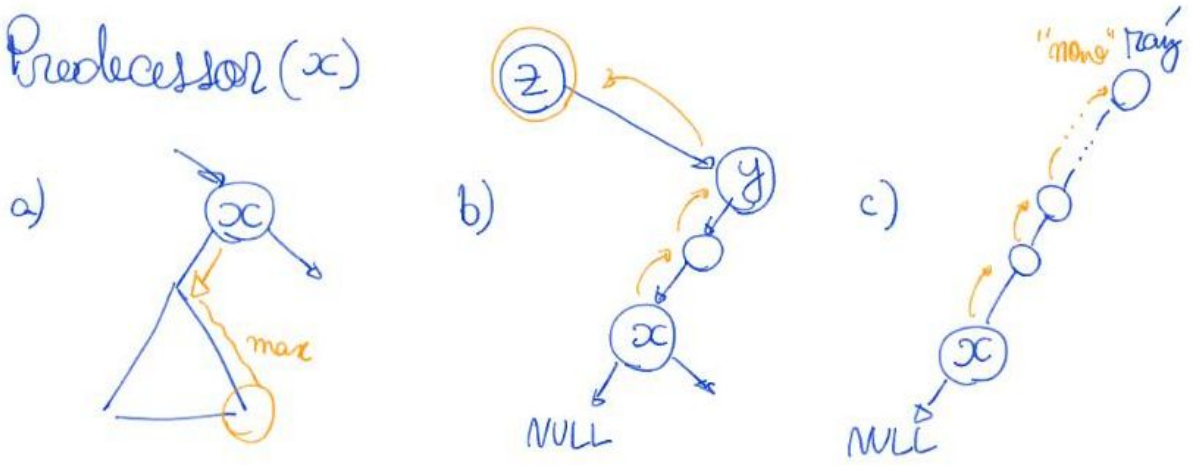
```c
void preOrdem(Arvore r)
{
    if (r != NULL)
    {
        printf("%d\n", r->conteudo);
        preOrdem(r->esq);
        preOrdem(r->dir);
    }
}
```

Podemos ainda percorrer uma árvore por níveis,

- imprimindo todos os nós de um nível,
    - antes de passar para os nós do próximo nível,
- sendo que começamos pela raiz,
    - e o nível de um nó corresponde à distância da raiz até ele.
- Este tipo de percurso não usa recursão ou pilha, mas sim uma fila
    - e lembra nosso algoritmo para cálculo de distâncias.

Predecessor (sucessor)

- Dado um apontador para um nó queremos o apontador
    - para o nó que o precede (sucede) no percurso in ordem.
- Note que o primeiro (último) nó do percurso
    - não tem predecessor (sucessor).
- Para implementar essas operações, vamos usar em cada nó,
    - um apontador para o pai do mesmo.
    - O pai da raiz é NULL.
- Procedimento, sendo x o nó corrente:
    - a) se o filho esquerdo (direito) de x é não vazio,
        - devolva o nó mais à direita da subárvore enraizada neste filho.
    - b) caso contrário, siga repetidamente apontadores
        - para o antecessor de x até visitar nós y e z
            - tal que y é filho direito (esquerdo) de z.
                - Devolva z.
        - Observe que, x é o nó mais à esquerda (direita)
            - da subárvore direita (esquerda) de z.
            - Portanto, x é sucessor (predecessor) de z.
    - c) se não encontrar, devolva “none”.




```c
Noh *predecessor(Noh *x) {
    Noh *p;
    if (x->esq != NULL) {
        p = x->esq;
        while (p->dir != NULL)
            p = p->dir;
    } else {
        p = x->pai;
        while (p != NULL && p->esq == x) {
            x = p;
            p = p->pai;
        }
    }
    return p;
}
```

- Eficiência de tempo O(altura),
    - pois no primeiro laço o apontador desce em uma subárvore,
    - no segundo laço ele sobe em direção à raiz
    - e apenas um dos laços ocorre.
- Eficiência de espaço O(1),
    - pois número e tamanho de variáveis auxiliares
        - não depende do tamanho da árvore.

Quiz: Suponha que os apontadores pai estão vazios em uma árvore.

- Como projetar uma função para preenchê-los?