AED1 - Aula 06
Crescimento de funções, busca sequencial e binária em vetores

"Busca binária está para algoritmos assim como a roda está para mecânica: ela é simples, elegante e imensamente importante"

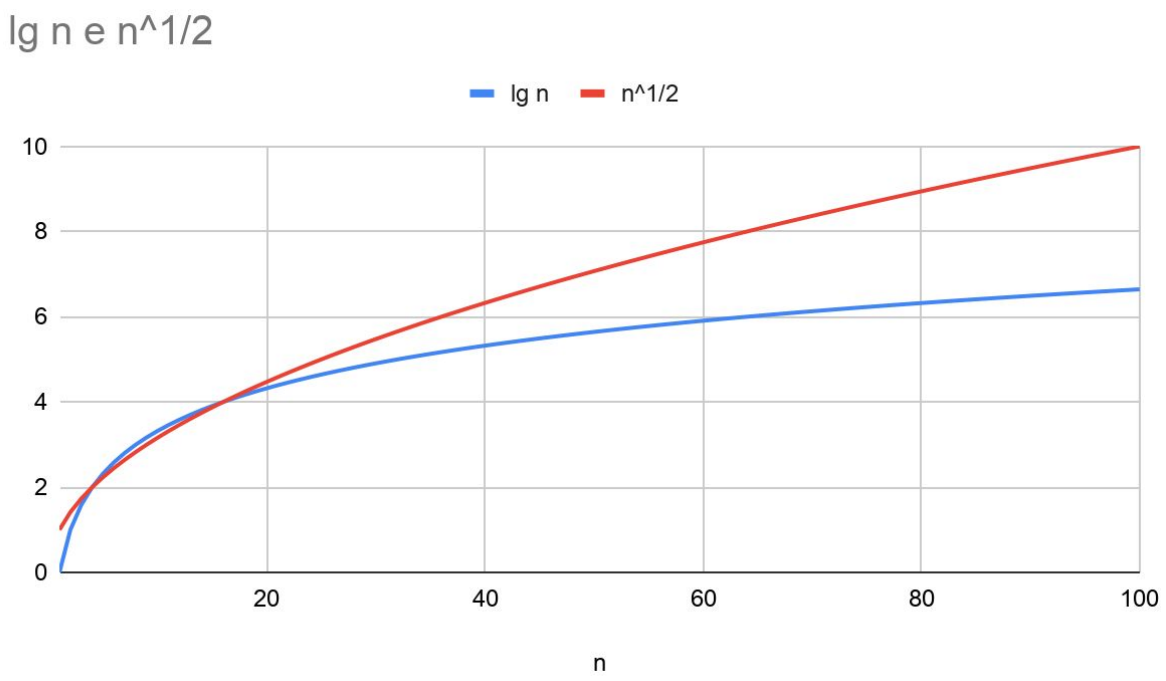
- U. Manber, Introduction to Algorithms: a Creative Approach, 1989.

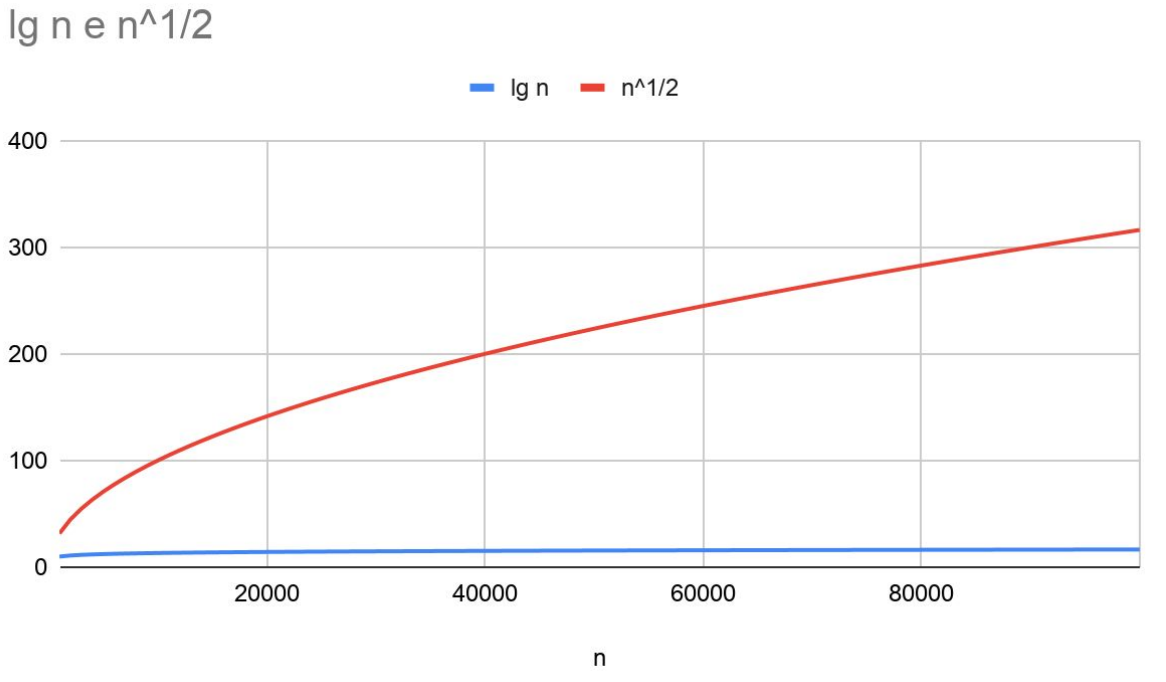
Crescimento de funções

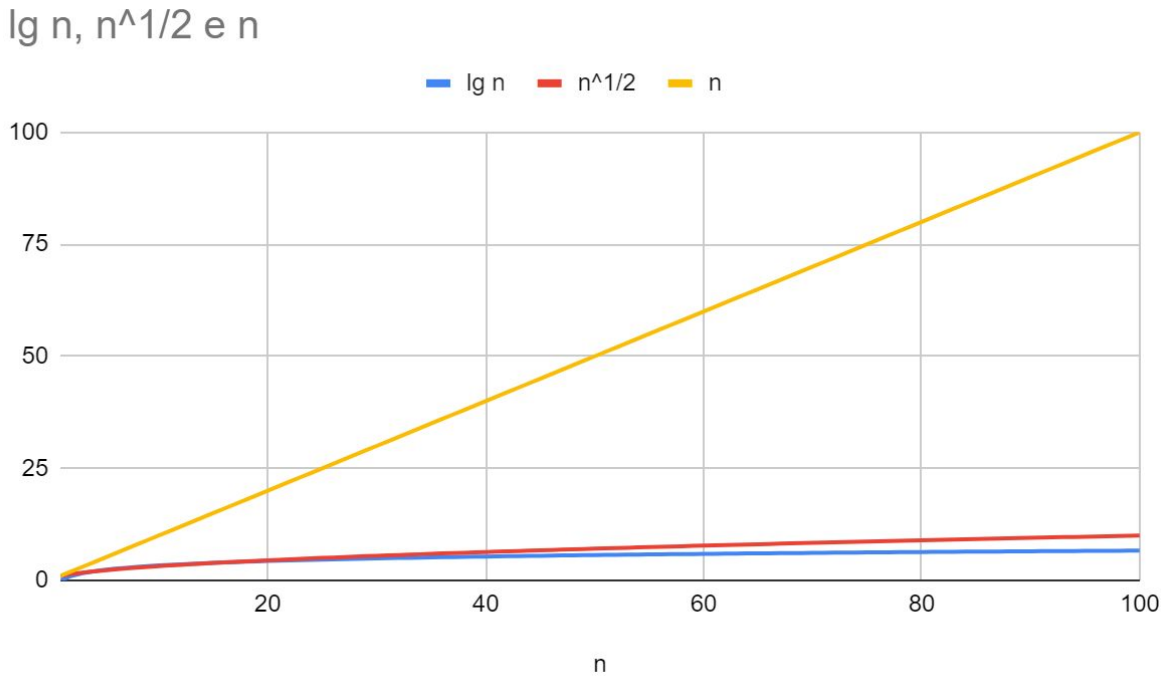
n	**10^3**	**10^6**	**10^9**
log_2 n	10	20	30
n^½	32	10^3	3*10^4
n	10^3	10^6	10^9
n log_2 n	10^4	2*10^7	3*10^10
n^2	10^6	10^12	10^18
n^3	10^9	10^18	10^27
2^n	10^300	10^300000	10^(3*10^8)

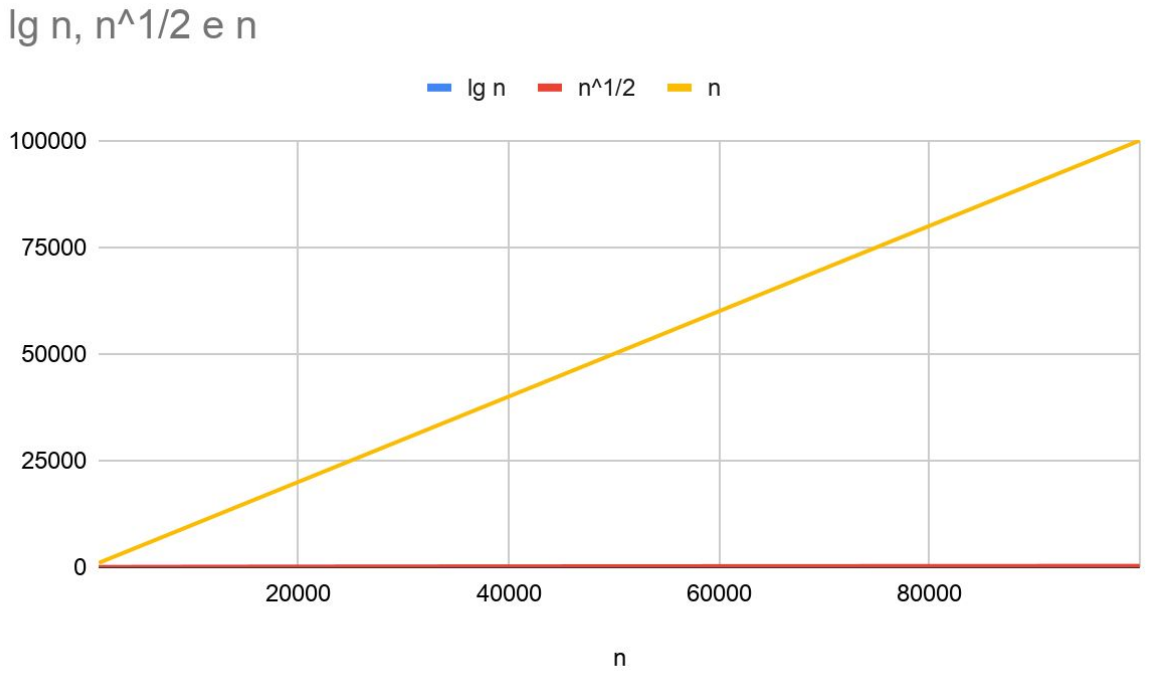
Interpretação temporal considerando um computador de 1GHz

n	**10^3**	**10^6**	**10^9**
log_2 n	<< 1s	<< 1s	<< 1s
n^½	<< 1s	<< 1s	<< 1s
n	<< 1s	<< 1s	1s
n log_2 n	<< 1s	<1s	30s
n^2	<< 1s	16 min	31 anos
n^3	1s	31 anos	31709791 milênios
2^n	esquece...		

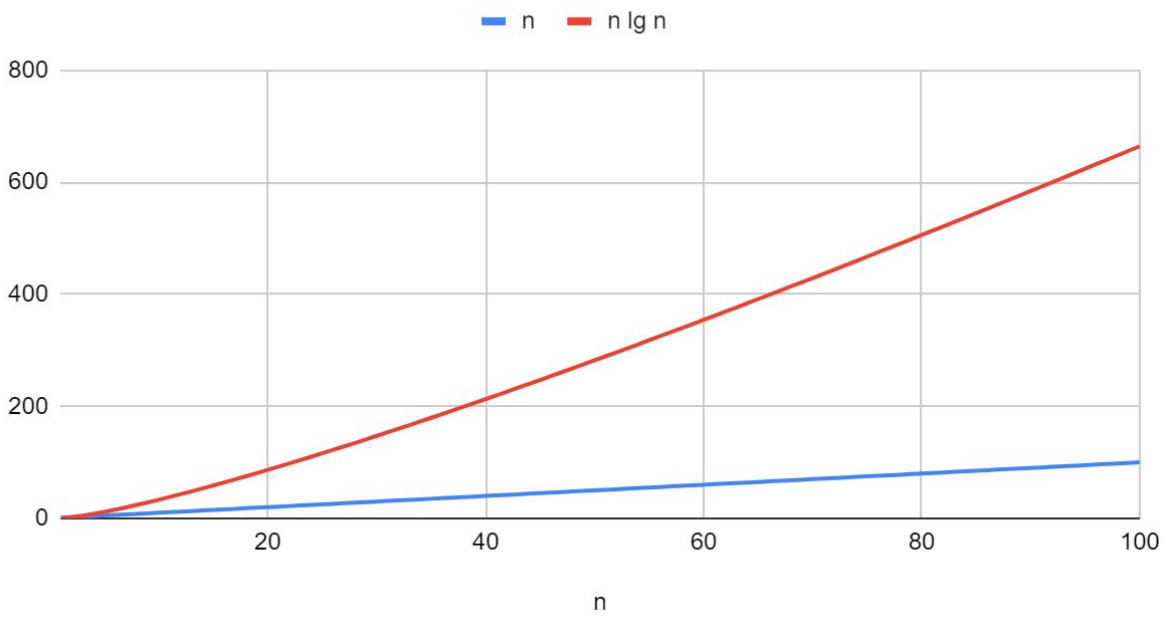

lg n e n^1/2
lg n
n^1/2
10
8
6
4
2
0
20
40
60
80
100
n


lg n e n^1/2
lg n
n^1/2
400
300
200
100
0
20000
40000
60000
80000
n

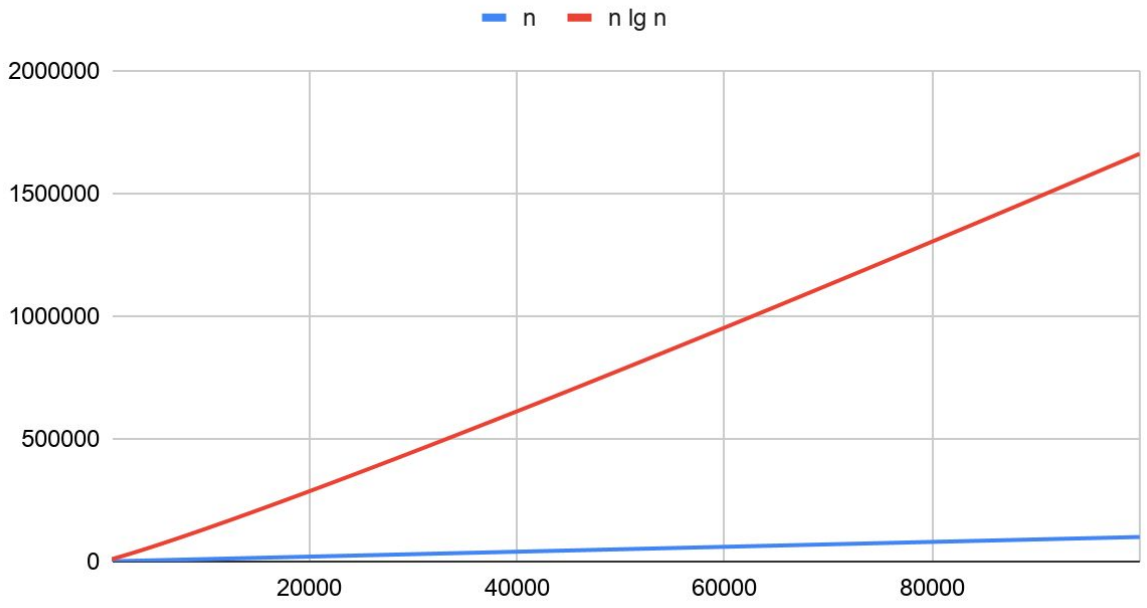

lg n, n^1/2 e n
lg n
n^1/2
n
100
75
50
25
0
20
40
60
80
100
n

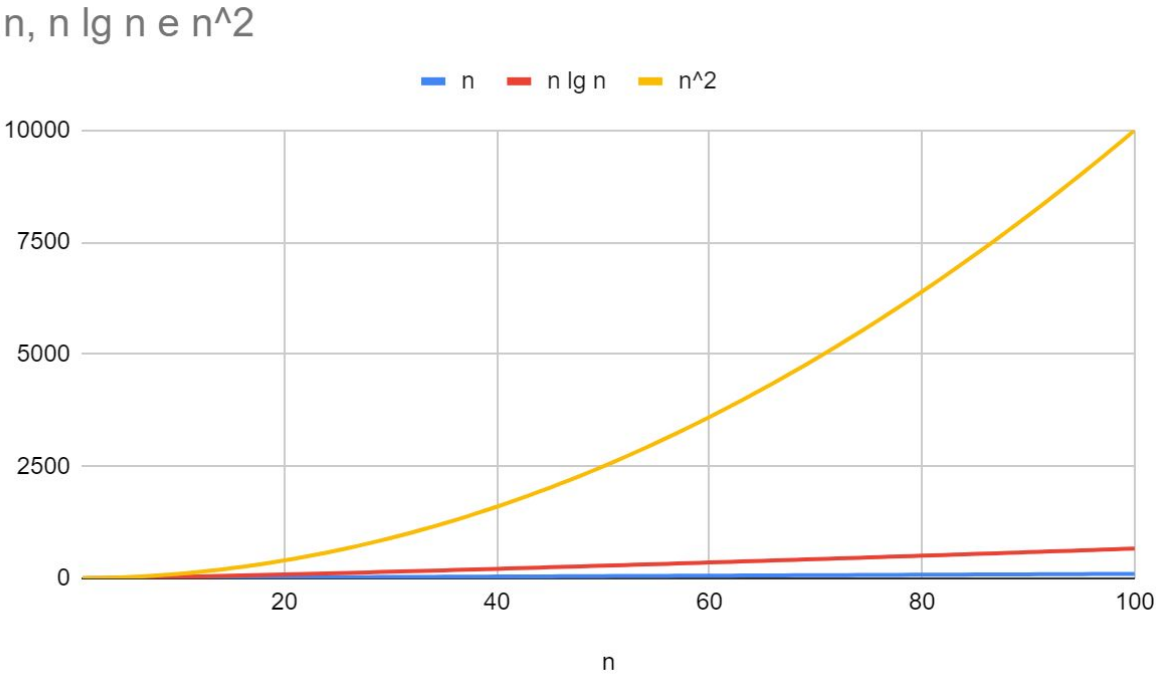

lg n, n^1/2 e n
lg n
n^1/2
n
100000
75000
50000
25000
0
20000
40000
60000
80000
n

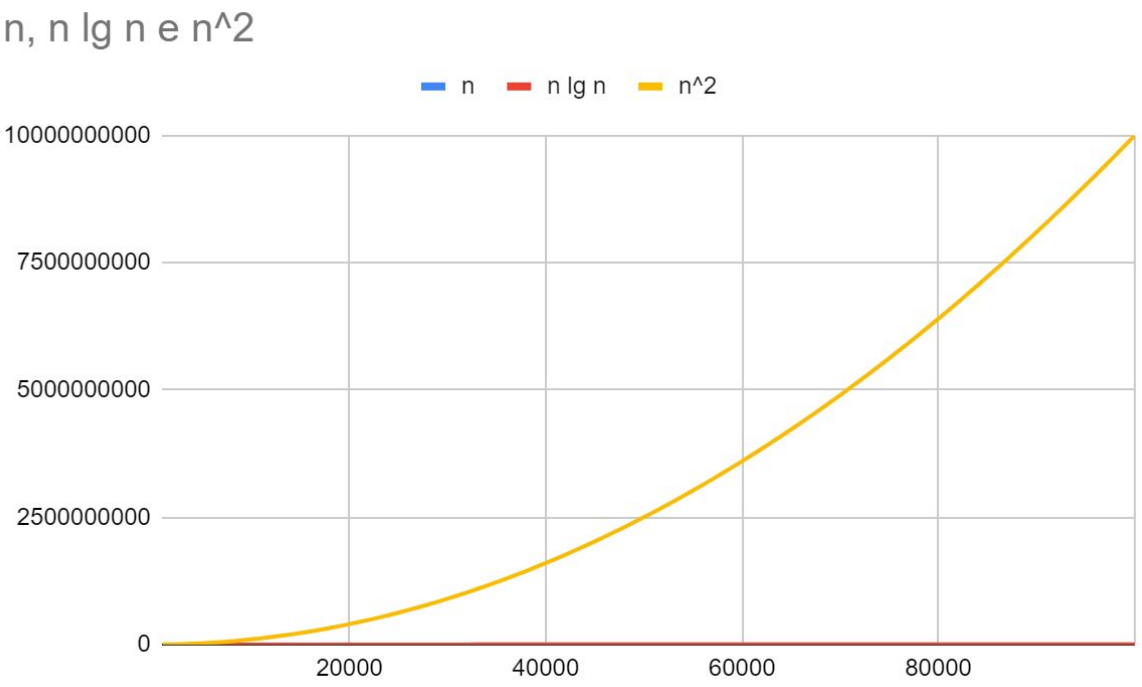
n e n lg n

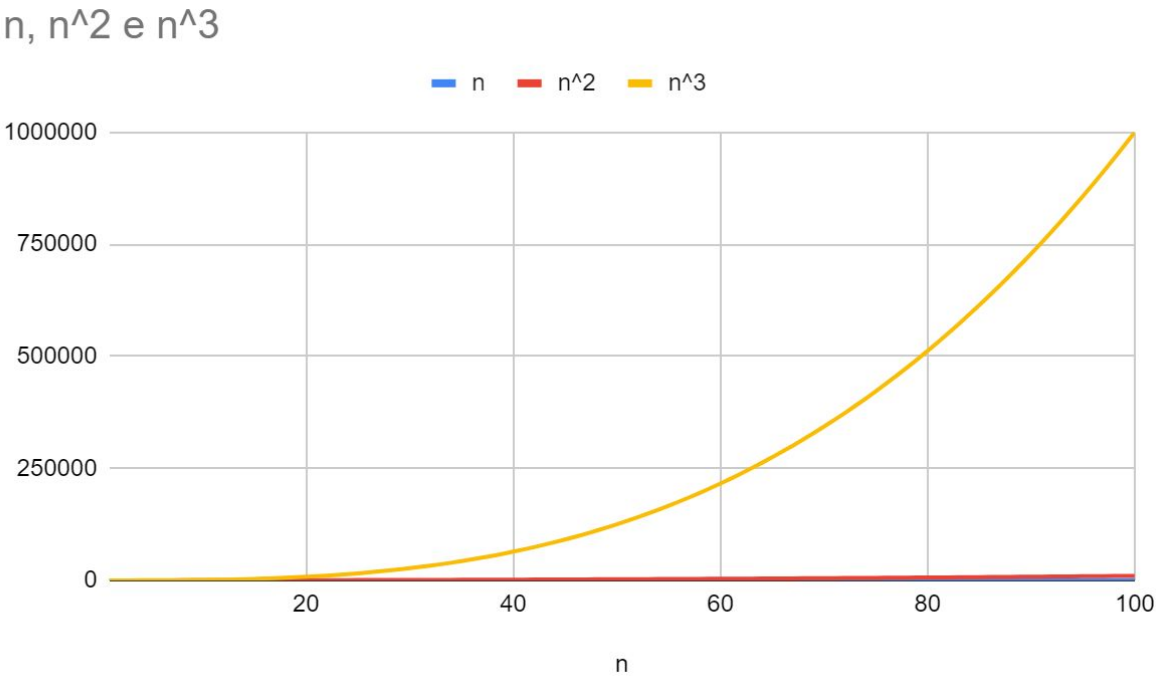


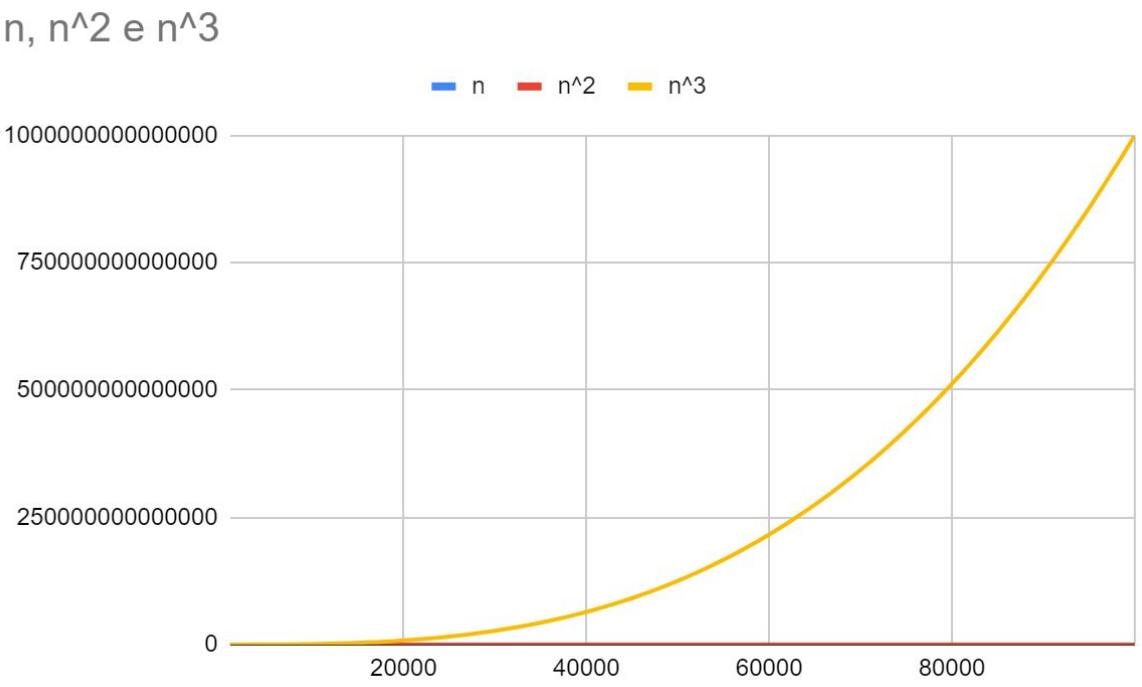
n e n lg n

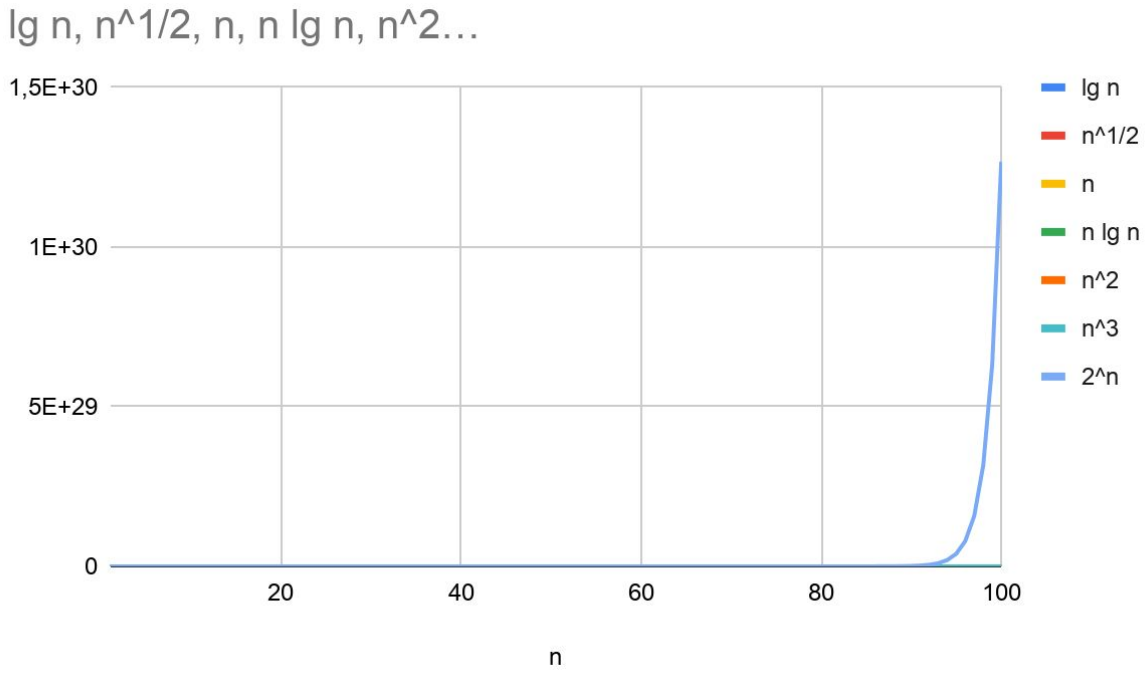


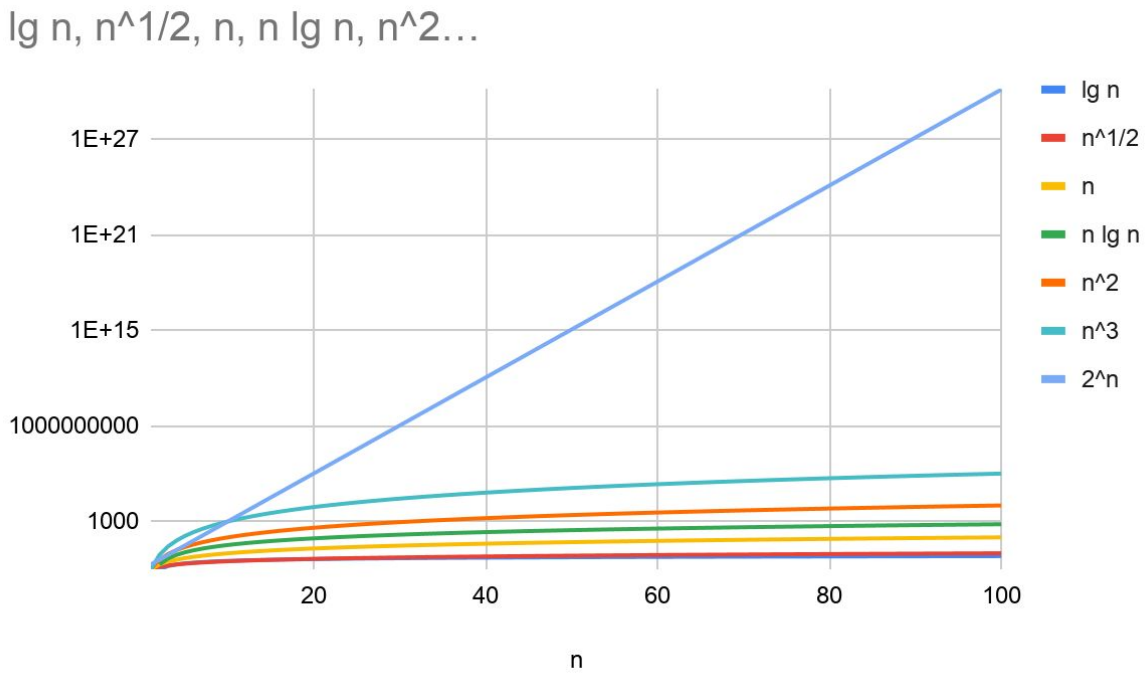

n, n lg n e n^2
n
n lg n
n^2
10000
7500
5000
2500
0
20
40
60
80
100
n


n, n lg n e n^2
n
n lg n
n^2
10000000000
7500000000
5000000000
2500000000
0
20000
40000
60000
80000


n, n^2 e n^3
n
n^2
n^3
1000000
750000
500000
250000
0
20
40
60
80
100
n


n, n^2 e n^3
n
n^2
n^3
1000000000000000
750000000000000
500000000000000
250000000000000
0
20000
40000
60000
80000





Busca sequencial

Para resolver este problema, temos de

- devolver a posição de um determinado elemento x
    - em um vetor de inteiros v.

Uma ideia básica é percorrer o vetor verificando se x é o elemento de cada posição.

Algoritmo iterativo que busca um elemento x em um vetor v de tamanho n

```
int buscaSequencial1(int v[], int n, int x)
{
   int i = 0;
   while (i < n && v[i] != x)
       i++;
   if (i < n)
       return i;
   return -1;
}
```

Variações:

- Uma variação do algoritmo anterior é percorrer o vetor do fim para o início.
    - Neste caso, se o elemento não for encontrado i sai do laço valendo -1,
        - o que permite eliminar o if.
- Embora esta variante também resolva o problema,
    - ela pode devolver valor diferente numa situação específica. Qual?

Corretude e invariante:

- O invariante principal do algoritmo é que, no início de toda iteração do laço,
    - o vetor v[0 .. i - 1] não contém x.
- No início o invariante vale trivialmente,
    - pois i = 0 e v[0 .. i - 1] é vazio.
- O invariante se mantém de uma iteração para outra
    - pois i só é incrementado se v[i] != x.
- Se o algoritmo sair do laço por violar a primeira condição (i < n),
    - o invariante garante que x não está no vetor.
- Caso contrário, a violação da segunda condição (v[i] != x)
    - garante que o algoritmo devolve a posição correta de x.

Eficiência de tempo:

- No pior caso o algoritmo precisa percorrer o vetor inteiro,
    - realizando da ordem de n operações, i.e., O(n).

Eficiência de espaço:

- O(1), pois só usa uma pequena quantidade de variáveis auxiliares,
    - cujos tamanhos não dependem de n.

E se o vetor estiver ordenado, nossa busca sequencial pode ser melhorada?

- Supondo que o vetor está em ordem crescente e
    - que estamos percorrendo-o do início ao fim,
- quando encontrarmos algum valor maior que x
    - sabemos que não adianta continuar buscando. Por que?
- O seguinte algoritmo utiliza essa ideia.

Algoritmo iterativo que realiza busca sequencial de um elemento x

- em um vetor v em ordem crescente de tamanho n.

```
int buscaSequencial2(int v[], int n, int x)
{
   int i = 0;
   while (i < n && v[i] < x)
       i++;
   if (i < n && v[i] == x)
       return i;
   return -1;
}
```

Convenções e variações:

- O algoritmo anterior devolve -1 se não encontrou o elemento.
- Outra convenção válida é devolver a posição em que
    - o elemento deveria ser inserido, de modo a manter a ordenação.
        - Como modificar o algoritmo para refletir esta convenção?

Corretude e invariante:

- O invariante principal do algoritmo é que, no início de toda iteração do laço,
    - temos v[i - 1] < x.
- Note que, como o vetor é ordenado, isso implica que
    - todo elemento em v[0 .. i - 1] é menor que x.
- O invariante vale trivialmente no início, pois i começa valendo 0.
- Supondo que ele vale no início de uma iteração qualquer,
    - como o laço só incrementa i se v[i] < x,
        - ele continua valendo no início da próxima iteração.
- Quando o algoritmo sai do laço, temos que i indica onde x deveria estar,
    - pois todo elemento em v[0..i - 1] é menor que x e
        - o algoritmo só sai do laço caso
            - o vetor tenha terminado, i.e., i = n,
            - ou v[i] >= n.

- Se i é um índice válido do vetor e x = v[i],
    - o algoritmo devolve i, indicando sucesso na busca.
- Senão, ele devolve -1, indicando que x não está no vetor.

Eficiência de tempo:
- o número de operações no pior caso é da ordem de n,
    - ou, simplesmente, O(n),
- mas vale notar que a constante é melhor no caso médio,
    - já que, em média, após percorrer metade do vetor
        - encontramos um elemento >= x e saímos do laço.

Eficiência de espaço:
- O(1), pois só usa uma pequena quantidade de variáveis auxiliares,
    - cujos tamanhos não dependem de n.

Busca binária

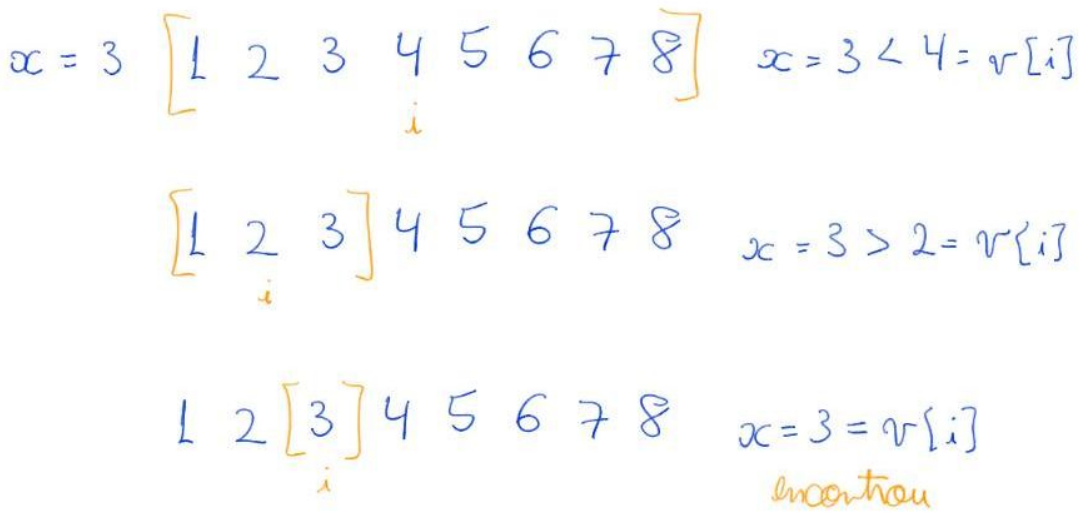
A ideia da busca binária deriva da seguinte propriedade de vetores ordenados:
- Se o valor buscado x é menor que o valor na i-ésima posição do vetor v,
    - i.e., x < v[i],
- Então x é menor que todo valor em v[i .. n - 1].
    - Portanto, x só pode ser encontrado
        - no subvetor complemento v[0 .. i - 1].
- Caso contrário, i.e., x > v[i], temos x maior que todo valor em v[0 .. i].
    - Portanto, x só pode ser encontrado
        - no subvetor complemento v[i+1..n-1].

Essa propriedade significa que,
- dependendo do índice i do valor v[i] com o qual comparamos x,
    - podemos descartar grandes pedaços do vetor.
- Por isso, devemos escolher sabiamente o índice i.

Note que, um índice i próximo dos extremos do vetor corrente
- pode resultar em descartes pequenos,
    - dependendo do resultado da comparação entre x e v[i].

Assim, o valor que nos garante descartes significativos,
- independente de tal resultado é
    - i igual ao meio do vetor corrente.

Exemplo de busca binária:



Algoritmo recursivo para busca binária de um elemento x

- em um vetor v em ordem crescente de tamanho n.

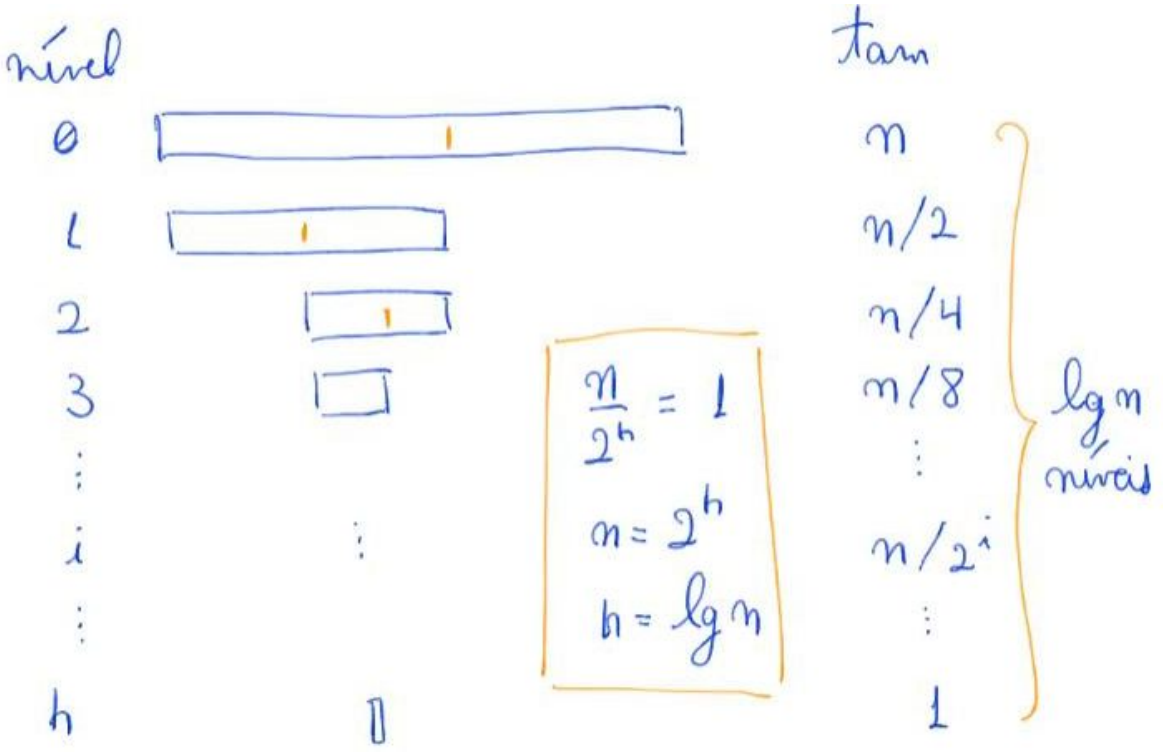
```c
int buscaBinariaR(int v[], int e, int d, int x)
{
   int m;
   if (d < e)
       return -1;
   m = (e + d) / 2;
   if (v[m] == x)
       return m;
   if (v[m] < x)
       return buscaBinariaR(v, m + 1, d, x);
   return buscaBinariaR(v, e, m - 1, x);
}

int buscaBinaria2(int v[], int n, int x)
{
   return buscaBinariaR(v, 0, n - 1, x);
}
```

Corretude:

- Deriva diretamente da propriedade anterior
    - e pode ser demonstrada usando indução matemática.

Eficiência de tempo:

- Cada chamada da função buscaBinariaR
    - desencadeia no máximo uma chamada recursiva,
        - na qual um dos extremos (e ou d) é atualizado com m (+ ou - 1),
    - sendo que m = (e + d) / 2.
- Por isso, o vetor corrente (que começa em e e termina em d)
    - diminui de pelo menos metade a cada chamada recursiva.
- Intuitivamente, podemos pensar que a cada chamada recursiva
    - o vetor que começa com tamanho n é dividido pela metade.
- Assim, depois de aproximadamente lg n chamadas recursivas,
    - seu tamanho é reduzido a 0, e as chamadas terminam.
- Como o número de operações realizadas
    - localmente em cada chamada da função é constante,
        - o algoritmo leva tempo da ordem de lg n, ou, O(lg n).



- Para calcular precisamente o número total de operações, usamos a recorrência
    - T(n) = T(n / 2) + 1,
    - T(0) = 1.
- Seguindo a recorrência
    - T(n / 2) = T(n / 4) + 1
    - T(n / 4) = T(n / 8) + 1
    - T(n / 8) = T(n / 16) + 1
    - ...
- Substituindo e simplificando
    - T(n) = T(n / 2^1) + 1

        - = T(n / 2^2) + 2
        - = T(n / 2^3) + 3
        - = T(n / 2^4) + 4
        - ...
- Esta relação sugere a fórmula geral
    - T(n) = T(n / 2^k) + k
- Sabemos que a recorrência acaba
    - quando o vetor corrente tiver tamanho 0.
- Como as sucessivas divisões por 2 no tamanho do vetor
    - são arredondadas para baixo, isso ocorre para k que satisfaça
        - n / 2^k < 1 <= n / 2^(k - 1).
- Portanto, n / 2^k < 1 <= n / 2^(k - 1) → n < 2^k <= 2n
    - → lg n < k <= lg 2n = 1 + lg n
- Substituindo k por 1 + lg n na recorrência
    - T(n) = T(n / 2^k) + k = T(0) + lg n + 1 = lg n + 2
- Assim, o número de operações no pior caso é da ordem de lg n,
    - ou simplesmente O(lg n).

Eficiência de espaço:

- O(log n), devido ao tamanho da cadeia de chamadas recursivas.

Algoritmo iterativo para busca binária de um elemento x

- em um vetor v em ordem crescente de tamanho n.

```c
int buscaBinaria(int v[], int n, int x)
{
   int e, m, d;
   e = 0;
   d = n - 1;
   while (e <= d)
   {
       m = (e + d) / 2;
       if (v[m] == x)
           return m;
       if (v[m] < x)
           e = m + 1;
       else
           d = m - 1;
   }
   return -1;
```

```
}
```

Corretude e invariante:

- O invariante principal é que no início de cada iteração
    - v[e - 1] < x < v[d + 1].
- Adotamos a convenção de que v[-1] = - infinito e v[n] = + infinito.
    - Portanto, o invariante vale no início da primeira iteração.
- Supondo que o invariante vale no início de uma iteração qualquer,
    - como no laço só atualizamos o extremo (e ou d) que não contém x,
        - de acordo com o resultado da comparação v[m] < x,
    - o invariante continua valendo no início da iteração seguinte.
        - Ou seja, sempre descartamos o subvetor correto.
- Se em alguma iteração a comparação v[m] == x for verdadeira,
    - devolve a posição de x.
- Caso contrário, sai do laço quando d = e - 1.
    - Pelo invariante, neste caso, v[e - 1] < x < v[d + 1] = v[e].
        - Portanto, x não está no vetor e o algoritmo devolve -1.

Eficiência de tempo:

- O(log n), sendo que a demonstração
    - é igual aquela feita para o algoritmo recursivo,
        - substituindo chamada recursiva por iteração na argumentação.

Eficiência de espaço:

- O(1), pois só usa uma pequena quantidade de variáveis auxiliares,
    - cujos tamanhos não dependem de n.

Convenções e variações:

- Nossos algoritmos para busca binária
    - devolvem -1 se não encontram o elemento.
- Outra convenção válida é devolver a posição em que
    - o elemento deveria ser inserido, de modo a manter a ordenação.
- Como modificar o algoritmo para refletir esta convenção?
    - Basta devolver o valor de e. Por que?
        - A resposta deriva do fato de, nos dois algoritmos
            - v[0 .. e - 1] < x < v[d + 1 .. n - 1]
        - No caso em que o elemento não é encontrado,
            - temos e = d - 1.
        - Portanto, v[0 .. e - 1] < x < v[e .. n - 1],
            - ou seja, todo elemento até e - 1 < x
                - e todo elemento a partir de e > x.