AED1 - Aula 04
Recursão, exponencial, análise de desempenho

Estrutura geral de um programa recursivo

se a instância em questão é pequena,
    resolva-a diretamente;
senão
    reduza-a a instâncias menores do mesmo problema,
    aplique o método a essas
    e use suas soluções para resolver a instância original.

Exponencial

Queremos projetar um algoritmo que recebe inteiros positivos k e n e devolve k^n.

Como k^n = k * k * k * … * k (n vezes)

- podemos projetar o seguinte algoritmo iterativo:

```
int expI(int k, int n)
{
   int i, exp = 1;
   for (i = 0; i < n; i++)
       exp *= k; // exp = exp * k
   return exp;
}
```

Invariante e corretude:

- A corretude do algoritmo iterativo expI depende
    - da correta identificação de seu invariante de laço.
- O invariante principal,
    - que vale no início de cada iteração do laço,
        - é exp = k^i.
- Para verificar que o invariante está correto,
    - observe que ele vale antes da primeira iteração
    - e continua valendo de uma iteração para outra.
- Demonstração por indução:
    - Primeiro verificamos que o invariante vale
        - no início da primeira iteração (caso base).

            - Antes da primeira iteração temos exp = 1 e i = 0.
                - Como exp = 1 = k^0 = k^i, o invariante vale.
    - Então, supomos que o invariante vale
        - no início de uma iteração qualquer, ou seja, exp = k^i,
            - e mostramos que no início da iteração seguinte
                - ele continua valendo.
        - Chamamos exp’ e i’ as variáveis no início da iteração seguinte.
            - Pelo comportamento do algoritmo dentro do laço, temos
                - exp’ = exp * k = k^i * k = k^(i + 1)
                - i’ = i + 1
        - Portanto, exp’ = k^(i + 1) = k^i’, e o invariante vale.
- Para verificar que o algoritmo está correto,
    - note que ao final do laço i = n,
        - caso em que o invariante garante que exp = k^n.

Eficiência de tempo:
- Número de operações proporcional a n, i.e., O(n),
    - já que o laço tem n iterações
    - e em cada iteração é realizado um número constante de operações.

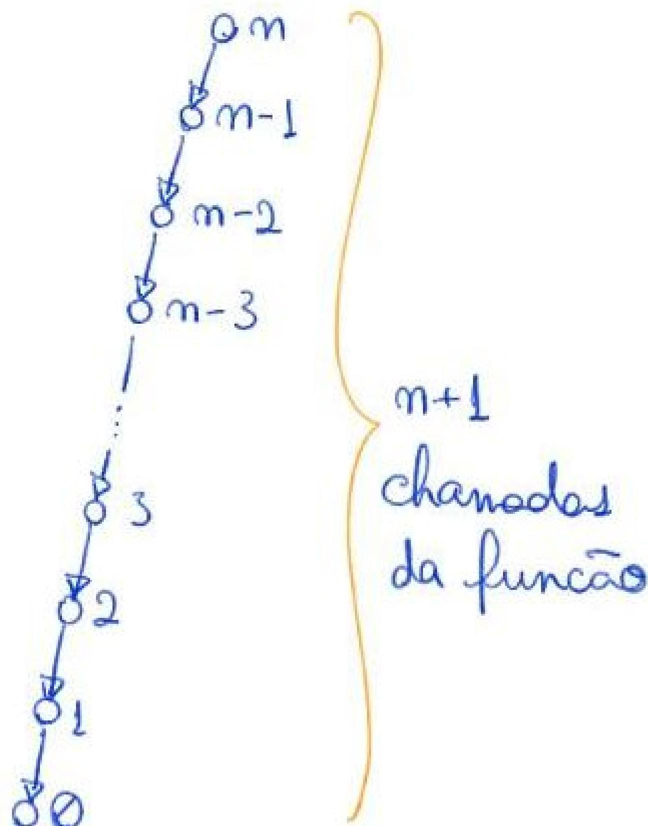
Eficiência de espaço:
- Memória auxiliar utilizada é constante, i.e., O(1),
    - pois o número de variáveis locais independe de n.

Também podemos descrever k^n usando a seguinte regra recursiva:
k^n = { k * k^(n - 1), se n > 0,
            1, se n = 0. }

Essa regra induz o seguinte algoritmo recursivo:
```
int expR(int k, int n)
{
   if (n == 0)
       return 1;
   return k * expR(k, n - 1);
}
```

Corretude:
- No caso de expR, como é comum com algoritmos recursivos,
    - sua corretude deriva diretamente da implementação
        - da regra em que este se baseia,
    - podendo ser verificada usando um prova por indução.

Eficiência de tempo:



- O cálculo da eficiência de um algoritmo recursivo depende
  - da resolução de uma função de recorrência que captura
    - a ordem do número de operações que tal algoritmo realiza.
- No caso do algoritmo expR temos a recorrência
  - $T(n) = T(n - 1) + 1$, já que cada chamada da função
    - desencadeia apenas uma outra chamada,
      - com n decrementado de 1,
    - e realiza uma quantidade constante de operações localmente.
  - $T(0) = 1$, pois o caso base da função recursiva ocorre quando $n = 0$.
- Identificada a recorrência, podemos resolvê-la por substituição:
  - $T(n) = T(n - 1) + 1$
  - $T(n - 1) = T(n - 2) + 1$
  - $T(n - 2) = T(n - 3) + 1$
  - $T(n - 3) = T(n - 4) + 1$
  - …
- Substituindo
  - $T(n) = T(n - 1) + 1$
  - $T(n) = (T(n - 2) + 1) + 1 = T(n - 2) + 2$
  - $T(n) = (T(n - 3) + 2) + 1 = T(n - 3) + 3$
  - $T(n) = (T(n - 4) + 3) + 1 = T(n - 4) + 4$

- ...
- Generalizando
  - $T(n) = T(n - i) + i$
- No final (caso base da recursão) temos
  - $n - i = 0 \Rightarrow i = n$
- Portanto,
  - $T(n) = T(n - n) + n = T(0) + n = n + 1$.
- Ou seja, o número total de operações é da ordem de n,
  - i.e., O(n).

Eficiência de espaço:

- A quantidade de memória auxiliar utilizada é igual à eficiência de tempo,
  - i.e., O(n).
- Isso acontece porque cada nova chamada recursiva
  - utiliza algumas variáveis auxiliares locais,
    - que só começam a ser liberadas
      - depois que a última chamada é resolvida.

Nossos dois algoritmos levam tempo proporcional a n.

- Será que conseguimos fazer melhor?

Pensando no caso especial em que n é múltiplo de 2,

- podemos calcular k^n com a seguinte regra:
  - k^n = k^(n / 2) * k^(n / 2)

Note que, os dois termos multiplicados são iguais,

- o que sugere um algoritmo recursivo em que cada chamada da função
  - realiza apenas uma chamada recursiva, com n dividido por 2,
    - e depois multiplica o resultado desta chamada por ele próprio.
- Essa ideia parece interessante, pois n está diminuindo mais rapidamente
  - do que nos nossos algoritmos anteriores.

Claro que, o algoritmo tem que tomar algum cuidado quando n não é par.

- Lembrando que a operação n / 2 corresponde ao piso da divisão,
  - para n ímpar temos a regra:
    - k^n = k^(n / 2) * k^(n / 2) * k

Por fim, o caso base continua ocorrendo quando n = 0.

- Assim, temos o algoritmo:

```
int expR2(int k, int n)
{
```

```
    int exp;
    if (n == 0)
        return 1;
    if (n % 2 == 0)
    {
        exp = expR2(k, n / 2);
        exp *= exp;
    }
    else // n % 2 == 1
    {
        exp = expR2(k, n / 2);
        exp *= exp;
        exp *= k;
    }
    return exp;
}
```

Como a parte inicial das regras é comum,

- podemos implementar a seguinte versão mais curta do algoritmo:

```
int expR3(int k, int n)
{
    int exp;
    if (n == 0)
        return 1;
    exp = expR3(k, n / 2);
    exp *= exp;
    if (n % 2 == 0)
        return exp;
    return k * exp;
}
```

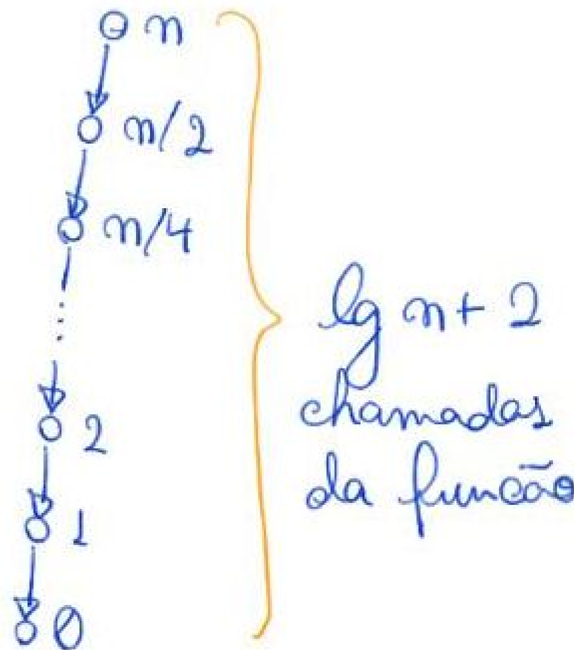
Corretude:

- A corretude deste algoritmo deriva diretamente
    - da corretude da regra que o motivou.

Eficiência de tempo:

- A eficiência de tempo deste algoritmo guarda uma grata surpresa,

    - que deriva do fato dele dividir n por 2 a cada chamada recursiva.



- Para calcular a ordem do número de operações que ele realiza
    - vamos usar a recorrência:
        - T(n) = T(n / 2) + 1,
    - já que cada chamada da função desencadeia apenas
        - uma outra chamada, com n dividido por 2.
    - T(0) = 1, pois o caso base da função recursiva ocorre quando n = 0.
- Resolução da recorrência por substituição:
    - T(n) = T(n / 2) + 1
    - T(n / 2) = T(n / 4) + 1
    - T(n / 4) = T(n / 8) + 1
    - T(n / 8) = T(n / 16) + 1
    - T(n / 16) = T(n / 32) + 1
    - …
- Substituindo
    - T(n) = T(n / 2) + 1
    - T(n) = (T(n / 4) + 1) + 1 = T(n / 4) + 2
    - T(n) = (T(n / 8) + 1) + 2 = T(n / 8) + 3
    - T(n) = (T(n / 16) + 1) + 3 = T(n / 16) + 4
    - T(n) = (T(n / 32) + 1) + 4 = T(n / 32) + 5
    - ...
- Sucessivas divisões por 2 nos sugerem ficar atentos
    - ao aparecimento de funções logarítmicas e exponenciais.
- Observe que
    - T(n) = T(n / 2) + 1 = T(n / 2^1) + 1
    - T(n) = T(n / 4) + 2 = T(n / 2^2) + 2

    - $T(n) = T(n / 8) + 3 = T(n / 2^3) + 3$
    - $T(n) = T(n / 16) + 4 = T(n / 2^4) + 4$
    - $T(n) = T(n / 32) + 5 = T(n/2^5) + 5$
    - …
- Generalizando
    - $T(n) = T(n / 2^i) + i$
- No final (caso base da recursão) temos $n / 2^i = 0$,
    - o que pode causar estranheza, já que
        - o resultado de uma divisão não deveria ser 0.
    - Isso se explica por se tratar de uma divisão inteira,
        - que devolve o piso do resultado da divisão.
    - Assim, conseguimos inferir que se $n / 2^i = 0$,
        - então $n / 2^{(i - 1)} = 1$,
            - já que a divisão inteira de 1 por 2 é 0.
    - Resolvendo $n / 2^{(i - 1)} = 1 \Rightarrow i = \lg n + 1$.
- Portanto,
    - $T(n) = T(n / 2^{(\lg n + 1)}) + (\lg n + 1)$
    - $T(n) = T(n / 2n) + \lg n + 1$
    - $T(n) = T(0) + \lg n + 1$
    - $T(n) = 1 + \lg n + 1$
    - $T(n) = \lg n + 2$.
- Ou seja, o número de operações realizadas por expR3(n)
    - é da ordem de lg n, i.e., $O(\log n)$.
- Note que, este algoritmo é muito mais eficiente
    - que os anteriores para valores grandes de n.

Eficiência de espaço:
- A quantidade de memória auxiliar utilizada é igual à eficiência de tempo,
    - i.e., $O(\log n)$.
- Isso acontece porque cada nova chamada recursiva
    - utiliza algumas variáveis auxiliares locais,
        - que só começam a ser liberadas
            - depois que a última chamada é resolvida.

Vale destacar que esse algoritmo é um exemplo de uso
- da técnica de divisão e conquista, que é largamente usada
    - para obter algoritmos mais eficientes para diversos problemas.

Por fim, fica o seguinte exercício:
- projetar um algoritmo iterativo
    - que seja igualmente eficiente para o cálculo da exponencial.

Comentários sobre corretude e eficiência de algoritmos

Corretude de algoritmos:

- Em algoritmos recursivos costuma ser uma análise direta, bastando:
    - Mostrar que o algoritmo devolve o valor correto no caso base e,
    - Supondo que o algoritmo encontra o valor correto quando a entrada é menor que n, mostrar que ele devolve o valor correto para n.
- Em algoritmos iterativos é necessário identificar propriedades invariantes:
    - Um invariante é uma relação que depende dos valores das variáveis do algoritmo e se mantém válida ao longo das iterações de um laço.
    - Encontrando os invariantes corretos, a análise de corretude é semelhante a de algoritmos recursivos.

Eficiência de algoritmos:

- Em algoritmos iterativos costuma ser bem direta,
    - bastando somar operações realizadas dentro de um laço e
        - multiplicar o resultado pelo número de iterações do laço.
- Em algoritmos recursivos é necessário usar uma fórmula de recorrência:
    - Por exemplo, a recorrência $T(n) = T(n - 1) + 1$ e $T(0) = 1$, captura
        - a ordem de operações realizada por um algoritmo que, em cada chamada recursiva, realiza um número constante de operações e faz uma chamada recursiva com a entrada reduzida de um,
        - e que faz um número constante de operações no caso base.
    - Outro exemplo, a recorrência $T(n) = 2\,T(n / 2) + 1$ e $T(1) = 1$, captura
        - a eficiência de um algoritmo que, em cada chamada recursiva, realiza um número constante de operações e faz duas chamadas recursivas com a entrada reduzida pela metade,
        - e que faz um número constante de operações no caso base.
- De posse da recorrência, pode-se simular seu comportamento, para
    - encontrar uma função (n, n^2, $\log n$, 2^n, etc) que descreva o comportamento da mesma conforme o tamanho da entrada n varia.
    - Esta função descreve a ordem do número de operações realizada pelo algoritmo recursivo.

Soluções para o exercício deixado no final:

```
int expI2(int k, int n)
{
   if (n == 0)
       return 1;
   // invariante: exp = k^i
   int i = 1, exp = k;
   while (i <= n / 2)
   {
       exp *= exp; // exp = exp * exp
       i = 2 * i;
   }
   if (i < n)
       exp *= expI2(k, n - i);
   return exp;
}

int expI3(int k, int n)
{
   int exp_acum = 1, n_falt = n;
   while (n_falt > 0)
   {
       // invariante: exp = k^i
       int i = 1, exp = k;
       while (i <= n_falt / 2)
       {
           exp *= exp; // exp = exp * exp
           i = 2 * i;
       }

       exp_acum *= exp; // exp_acum = exp_acum * exp;
       n_falt -= i;     // n_falt = n_falt - i;
   }
   return exp_acum;
}
```