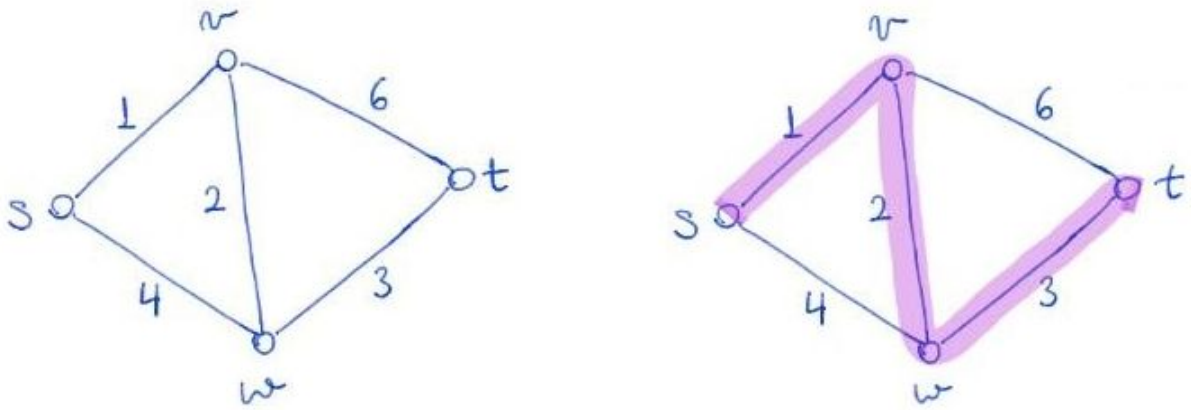
AED2 - Aula 27
Caminhos mínimos ponderados, grafos sem custos negativos e algoritmo de Dijkstra

Vamos continuar abordando o problema do caminho mínimo ponderado em grafos.

Neste problema recebemos como entrada:
- um grafo G = (V, E),
- com custo c(e) >= 0 em cada aresta e em E
- e um vértice origem s.

E queremos encontrar:
- o valor do caminho mínimo de s até cada vértice v em V,
    - i.e., a distância de s a v.
- Também gostaríamos que esses caminhos fossem devolvidos.

Exemplo de grafo com custos nas arestas:
- Caminho mínimo de s até t.



Algoritmo de Dijkstra

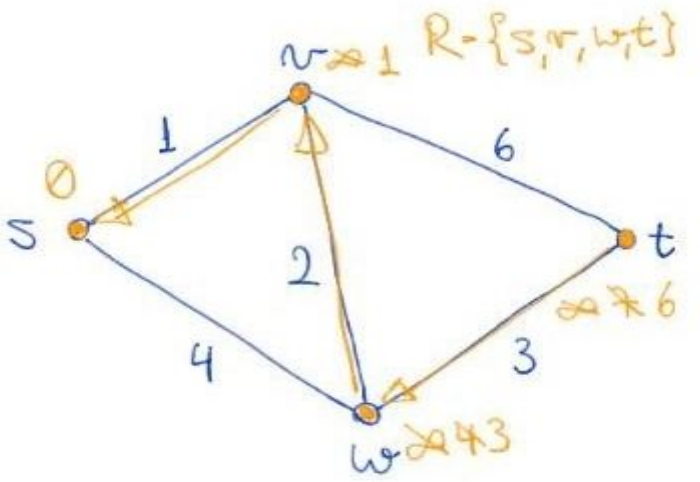
Vamos continuar a análise do algoritmo de Dijkstra para caminhos mínimos,
- que é um dos maiores clássicos da computação.

A seguir, para simplificar, vamos supor que todos os vértices do grafo
- são alcançados a partir do vértice s.
- Se esse não for o caso, podemos focar nos vértices alcançáveis
    - realizando uma busca a partir de s antes,
        - ou modificando levemente o algoritmo de Dijkstra.

Dijkstra(grafo G=(V,E), custos c, vértice s) {

```
        para todo v \in V
                dist[v] = +\inf
                pred[v] = NULL
        dist[s] = 0
        R = {}
        enquanto R != V
                // escolha gulosa do algoritmo de Dijkstra
                pegar o vértice v em V \ R com menor valor de dist[]
                adicione v a R
                para todo arco (v, w) com w em V \ R
                        se dist[w] > dist[v] + c(v, w)
                                dist[w] = dist[v] + c(v, w)
                                pred[w] = v
}
```

Exemplo de funcionamento do algoritmo:



Prova de corretude:

O algoritmo de Dijkstra mantém as seguintes propriedades invariantes no início de cada iteração do laço principal do algoritmo:

1. para todo vértice v em R, o valor dist[v] corresponde ao custo do caminho mínimo de s até v.
2. para todo vértice v em V o vértice pred[v] corresponde ao penúltimo vértice em um menor caminho de s até v cujos vértices intermediários estão em R.
3. para todo vértice v em V \ R o valor dist[v] corresponde ao custo do menor caminho cujos vértices intermediários estão em R

Faremos a prova por indução no número de iterações k.

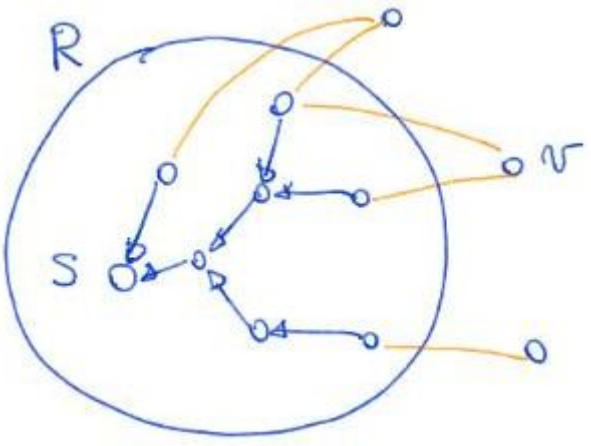
Caso base: no início da primeira iteração R é vazio, portanto

- as propriedades 1 e 2 valem trivialmente
- e a propriedade 3 vale porque dist[s] = 0 e os demais dist[ ] são +inf.

H.I.: as propriedades 1, 2 e 3 do invariante valem no início da iteração k.

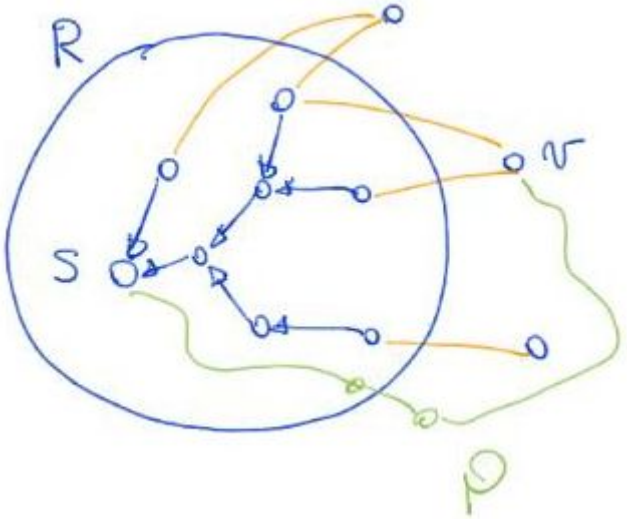
Passo: considere a iteração k em que o vértice v é inserido em R.

O vértice v é inserido por ser o vértice fora de R com menor valor para dist[].



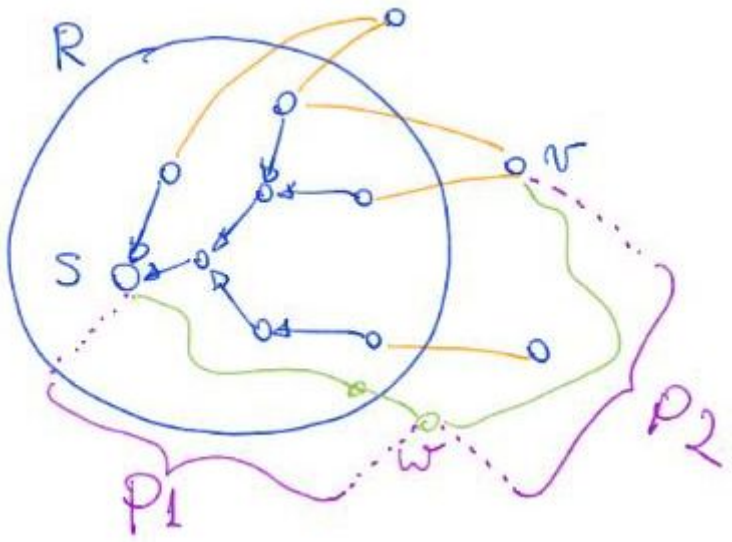
Pela propriedade 3 da H.I. temos que v é o vértice com menor caminho

- cujos vértices intermediários estão em R.
- Vamos mostrar que este é um caminho mínimo de s até v.



Considere um caminho P qualquer de s até v e seja c(P) o custo de P.

- Em algum momento P tem que cruzar a fronteira entre
    - vértices que estão em R e vértices fora de R.
- Suponha que o primeiro vértice de P fora de R é w, e divida P em
    - P1 (parte que vai de s a w)
    - e P2 (parte que vai de w a v).



- Pela propriedade 3 da H.I. temos que,
    - dist[w] é o menor caminho de s até w que só usa vértices em R.
        - Portanto, c(P1) >= dist[w].
- Como não temos arcos de custo negativo, c(P2) >= 0.
- Assim, c(P) = c(P1) + c(P2)
  >= dist[w] + 0 >= dist[v],
    - pela escolha de v como o vértice que minimiza dist[ ].
- Como mostramos que o custo de um caminho P qualquer de s até v
    - tem custo maior ou igual a dist[v],
- concluímos que dist[v] corresponde ao custo
    - de um caminho mínimo de s até v
- e a propriedade 1 do invariante se mantém, no início da iteração k + 1,
    - depois que v é adicionado a R.

Agora vamos mostrar que as propriedades 2 e 3 se mantém.

- Para os vértices cujos valores dist[ ] e pred[ ] não mudaram
    - ao longo da iteração k o resultado segue da H.I..
- Vamos considerar um vértice z para o qual
    - os valores dist[z] e pred[z] mudaram na iteração k.
- Neste caso dist[z] = dist[v] + c(v,z) é menor que o valor antigo de dist[z],
    - já que essa é a condição do algoritmo para atualizar o valor de dist[ ].
- Portanto, dist[z] corresponde ao custo do menor caminho
    - cujos vértices intermediários estão em R,
        - já que agora v está em R
        - e o antigo dist[z] respeitava a propriedade 3 da H.I..
- Além disso, a propriedade 2 vale porque pred[z] passa a ser v.

Código de uma implementação básica do algoritmo de Dijkstra:

```c
void Dijkstra(Graph G, int s, int *dist, int *pred){
   int i, *R;
   int v, w, custo, tam_R, min_dist;
   link p;
   // inicializando distancias e predecessores
   for (i = 0; i < G->n; i++){
       dist[i] = __INT_MAX__;
       pred[i] = -1;
   }
   dist[s] = 0;
   // inicializando conjunto de vértices "resolvidos" R
   R = malloc(G->n * sizeof(int));
   for (i = 0; i < G->n; i++)
       R[i] = 0;
   tam_R = 0;
   while (tam_R < G->n){
       // buscando vértice v que minimiza dist[v]
       min_dist = __INT_MAX__;
       for (i = 0; i <= G->n; i++)
           if (R[i] == 0 && dist[i] < min_dist){
               v = i;
               min_dist = dist[v];
           }
       // atualizando conjunto R
       R[v] = 1;
       tam_R++;
       // percorrendo lista com vizinhos de v
       p = G->A[v];
       while(p != NULL){
           w = p->index;
           custo = p->cost;
           // e atualizando as distancias e predecessores quando for o caso
           if (R[v] == 0 && dist[w] > dist[v] + custo){
               dist[w] = dist[v] + custo;
               pred[w] = v;
           }
           p = p->next;
       }
   }
   free(R);
}
```

Eficiência: O(n * n + m),

- pois o laço externo realiza n iterações e em cada uma delas
    - o primeiro laço interno passa por todos os vértices,
        - para escolher um vértice v,
    - enquanto o segundo laço interno

        - passa por todos os arcos do vértice v escolhido.
    - Com isso, ao longo do algoritmo todo arco é visitado uma vez,
        - já que cada vértice é considerado em apenas uma iteração do laço externo.
- Note que, como m <= n^2 em grafos sem arestas múltiplas,
    - o algoritmo tem eficiência O(n^2),
        - independente do grafo ser denso ou esparso.

Implementação avançada e eficiência:

A eficiência do algoritmo de Dijkstra depende fortemente

- da estrutura de dados que usamos para implementar as operações
    - de escolha do vértice com menor valor de dist[]
    - (e também na qual iremos atualizar os valores de dist[]
        - conforme encontramos novas arestas).
- A escolha tradicional neste caso, já que fazemos
    - sucessivas operações de remover o mínimo de um conjunto,
        - é utilizar um heap de mínimo.

Um heap de mínimo suporta as operações

- de remover o mínimo e inserir no heap em tempo O(log n).
- Também conseguimos construir um heap com n elementos em tempo O(n) e,
    - atualizar o valor de elementos no meio do heap em tempo O(log n),
        - o que será particularmente relevante para esta aplicação.
- Como implementar essa operação de atualização?

```
DijkstraComHeap(grafo G=(V,E), custos c, vértice s) {
        para todo v \in V
                dist[v] = +\inf
                pred[v] = NULL
        dist[s] = 0
        H = constroiHeap(V, dist)
        enquanto H != { }
                // escolha gulosa do algoritmo de Dijkstra
                v = removeMinHeap(H)
                para todo arco (v, w)
                        se dist[w] > dist[v] + c(v, w)
                                dist[w] = dist[v] + c(v, w)
                                pred[w] = v
                                atualizaHeap(H, w, dist[w])
}
```

Se implementarmos o algoritmo de Dijkstra usando um heap de mínimo

- ele terá eficiência de pior caso O(m log n),
    - supondo que o grafo seja conexo,
        - caso em que o número de arestas supera o número de vértices.
- Essa eficiência vem do fato que
    - em cada iteração do algoritmo um vértice é removido do heap.
- Assim, ao longo de toda a execução as remoções levam tempo O(n log n).
- Além disso, cada arco é considerado uma vez,
    - quando seu vértice origem é removido do heap.
- No caso deste arco fazer parte de um caminho mais curto
    - do que o já encontrado para seu o vértice destino
- o valor dist[ ] do vértice destino tem que ser atualizado no heap,
    - e atualizar tal valor custa O(log n).
- No total, ao longo de toda a execução do algoritmo
    - essas operações custam O(m log n).

Para a maior parte dos grafos essa é a melhor escolha

- para se implementar o algoritmo de Dijsktra,
    - já que ela é quase linear no tamanho do grafo.
- No entanto, existe uma exceção.
    - Em grafos particularmente densos, temos que m = O(n^2).

Nestes grafos a complexidade do algoritmo será O(m log n) = O(n^2 log n)

- Será que neste caso conseguimos fazer melhor?
    - A resposta é sim.
- Surpreendentemente, neste caso conseguimos
    - melhorar a eficiência de pior caso do algoritmo
        - usando uma estrutura de dados mais simples no lugar do heap.
- De fato, nossa implementação básica, que usa apenas
    - um vetor de tamanho n para armazenar as informações dist[ ],
- tem eficiência O(n * n + m) = O(n^2).

Código de uma implementação com heap do algoritmo de Dijkstra:

```
void DijkstraComHeap(Graph G, int s, int *dist, int *pred)
{
   int i;
   Elem *H, x;
   int v, w, custo, tam_H;
   link p;
   // inicializando distancias e predecessores
   for (i = 0; i < G->n; i++)
   {
       dist[i] = __INT_MAX__;
```

```
        pred[i] = -1;
    }
    dist[s] = 0;
    // criando um min heap
    H = malloc(G->n * sizeof(Elem));
    for (i = 0; i < G->n; i++)
    {
        H[i].chave = dist[i];
        H[i].conteudo = i;
    }
    troca(&H[0], &H[s]);
    tam_H = G->n;
    while (tam_H > 0)
    {
        // buscando vértice v que minimiza dist[v]
        tam_H = removeHeap(H, tam_H, &x);
        v = x.conteudo;
        // percorrendo lista com vizinhos de v
        p = G->A[v];
        while (p != NULL)
        {
            w = p->index;
            custo = p->cost;
            // e atualizando as distancias e predecessores quando for o caso
            if (dist[w] > dist[v] + custo)
            {
                dist[w] = dist[v] + custo;
                pred[w] = v;
                x.chave = dist[w];
                x.conteudo = w;
                tam_H = atualizaHeap(H, tam_H, x);
            }
            p = p->next;
        }
    }
    free(H);
}
```

- Note que é necessário implementar a função atualizaHeap, e que
    - para tanto é necessário modificar as funções sobeHeap e desceHeap.
- Isso porque, essas funções precisam manter atualizada, num vetor auxiliar,
    - a posição em que está cada elemento do heap.

Código de uma implementação preguiçosa com heap do algoritmo de Dijkstra:

```
void DijkstraComHeapLazy(Graph G, int s, int *dist, int *pred)
{
    int i, *R;
    Elem *H, x;
    int v, w, custo, tam_H;
```

```
link p;
// inicializando distancias e predecessores
for (i = 0; i < G->n; i++)
{
    dist[i] = __INT_MAX__;
    pred[i] = -1;
}
dist[s] = 0;
// criando um min heap
H = malloc(G->n * G->n * sizeof(Elem)); // heap precisa de mais espaço nessa versao
for (i = 0; i < G->n; i++)
{
    H[i].chave = dist[i];
    H[i].conteudo = i;
}
troca(&H[0], &H[s]);
tam_H = G->n;
// inicializando conjunto de vértices "resolvidos" R
R = malloc(G->n * sizeof(int));
for (i = 0; i < G->n; i++)
    R[i] = 0;
while (tam_H > 0)
{
    // buscando vértice v que minimiza dist[v]
    tam_H = removeHeap(H, tam_H, &x);
    v = x.conteudo;
    if (R[v] == 0)
    { // precisa manter um controle pra evitar revisitar vértices nessa versao
        R[v] = 1;
        // percorrendo lista com vizinhos de v
        p = G->A[v];
        while (p != NULL)
        {
            w = p->index;
            custo = p->cost;
            // e atualizando as distancias e predecessores quando for o caso
            if (dist[w] > dist[v] + custo)
            {
                dist[w] = dist[v] + custo;
                pred[w] = v;
                x.chave = dist[w];
                x.conteudo = w;
                tam_H = insereHeap(H, tam_H, x);
            }
            p = p->next;
        }
    }
}
```

```
   free(H);
}
```

- Note que, nesta implementação um mesmo vértice
    - pode ser inserido várias vezes no heap.
- Isso ocorre cada vez que a distância deste vértice é atualizada.
- No entanto, isso não compromete o correto funcionamento do algoritmo,
    - pois sairá primeiro do heap a cópia do vértice
        - com menor distância/prioridade.
- Tampouco é comprometida a eficiência de pior caso do algoritmo,
    - pois o número total de elementos inseridos (e removidos) do heap
        - é limitado superiormente pelo número de arcos do grafo.
            - Por que?

Código das operações de um heap de mínimo,

- com conteúdo dos elementos independente do valor das chaves,
- e sem a função atualizaHeap.

```
typedef struct elem
{
   int chave;
   int conteudo;
} Elem;

#define PAI(i) (i - 1) / 2
#define FILHO_ESQ(i) (2 * i + 1)
#define FILHO_DIR(i) (2 * i + 2)

void troca(Elem *a, Elem *b)
{
   Elem aux = *a;
   *a = *b;
   *b = aux;
}

void sobeHeap(Elem v[], int m)
{
   int f = m;
   while (f > 0 && v[PAI(f)].chave > v[f].chave)
   {
       troca(&v[f], &v[PAI(f)]);
       f = PAI(f);
   }
}

int insereHeap(Elem v[], int m, Elem x)
{
   v[m] = x;
```

```
   sobeHeap(v, m);
   return m + 1;
}

void desceHeap(Elem v[], int m, int k)
{
   int p = k, f;
   while (FILHO_ESQ(p) < m && (v[FILHO_ESQ(p)].chave < v[p].chave || (FILHO_DIR(p) < m &&
v[FILHO_DIR(p)].chave < v[p].chave)))
   {
       f = FILHO_ESQ(p);
       if (FILHO_DIR(p) < m &&
           v[FILHO_DIR(p)].chave < v[f].chave)
           f = FILHO_DIR(p);
       troca(&v[p], &v[f]);
       p = f;
   }
}

int removeHeap(Elem v[], int m, Elem *x)
{
   *x = v[0];
   troca(&v[0], &v[m - 1]);
   desceHeap(v, m, 0);
   return m - 1;
}
```