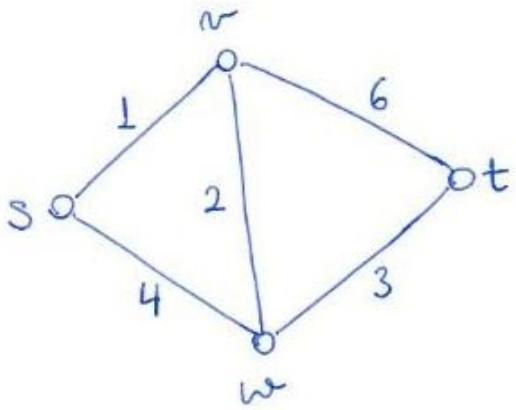
AED2 - Aula 26
Caminhos mínimos ponderados, DAGs e grafos sem custos negativos, algoritmo de Dijkstra

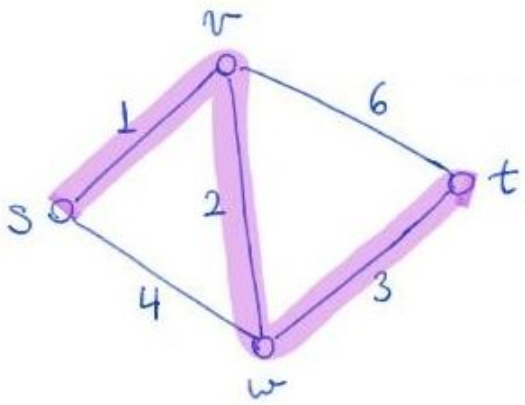
Hoje vamos falar do problema do caminho mínimo ponderado em grafos.

Neste problema recebemos como entrada:
- um grafo G = (V, E),
- com custo c(e) >= 0 em cada aresta e em E
- e um vértice origem s.

E queremos encontrar:
- o valor do caminho mínimo de s até cada vértice v em V,
    - i.e., a distância de s a v.
- Também gostaríamos que esses caminhos fossem devolvidos.

Exemplo de grafo com custos nas arestas:
- Caminho mínimo de s até t.





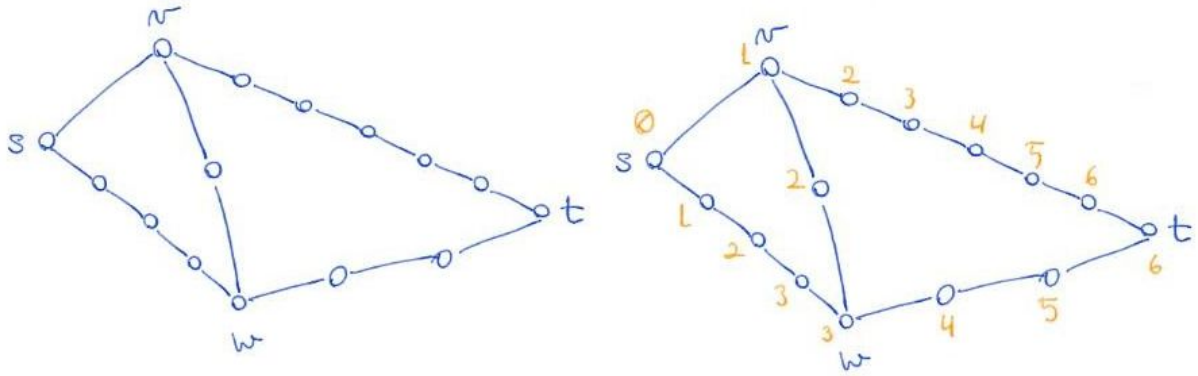
Mas, busca em largura não encontra caminhos mínimos
- ao explorar o grafo em camadas centradas em s?
    - Por que voltamos a esse problema? O que mudou?

Resp.: Busca em largura só funciona em grafos não ponderados,
- ou seja, naqueles em que toda aresta tem custo uniforme
- Note que, se aplicarmos busca em largura no exemplo anterior,
    - ela não nos devolve corretamente o caminho mínimo de s a t.

Para contornar este problema, observe que podemos converter
- uma entrada do problema de caminhos mínimos ponderados
    - em uma entrada não ponderada. Como?

Resp.: Substituindo cada aresta e com custo c(e)

- por um caminho com c(e) arestas e c(e) - 1 novos vértices.
    - O seguinte exemplo mostra esse procedimento

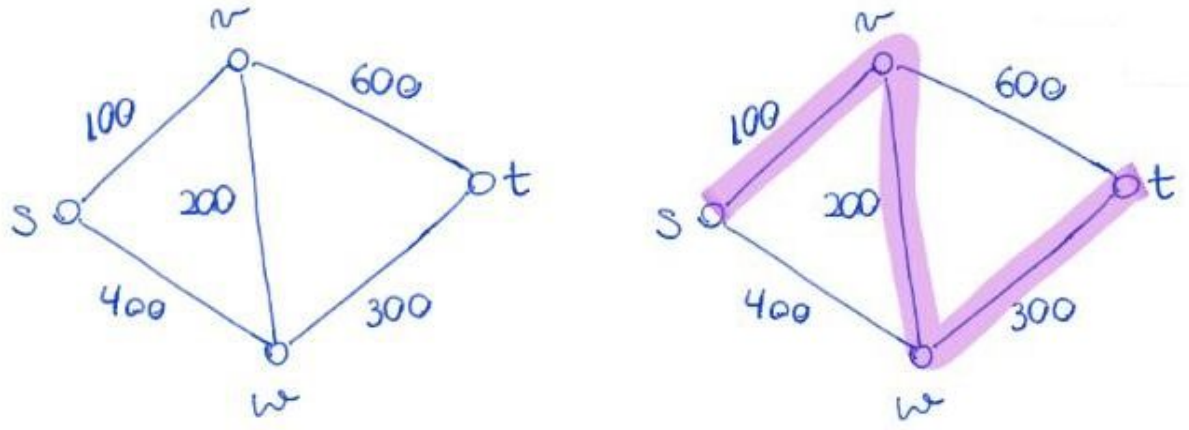


- Se utilizarmos o algoritmo de busca em largura neste grafo
    - resolvemos o problema de caminhos mínimos ponderado.

No entanto, essa solução pode não ser eficiente. Por que?

Resp.: Porque o grafo modificado tem o número de vértices e arestas

- aumentado em proporção ao custo c das arestas.
    - O seguinte exemplo evidencia isto



- Observe que, o grafo modificado pode crescer exponencialmente,
    - pois um custo que é representado usando k de bits
        - pode implicar um número 2^k de novos vértices.

Antes de estudar um algoritmo para o problema de caminhos mínimos ponderados,

- vamos ver um caso particular deste problema,
    - que possui uma solução extremamente eficiente,
        - que se baseia na solução para um problema
            - que estudamos recentemente.

Caminhos mínimos ponderados em DAGs

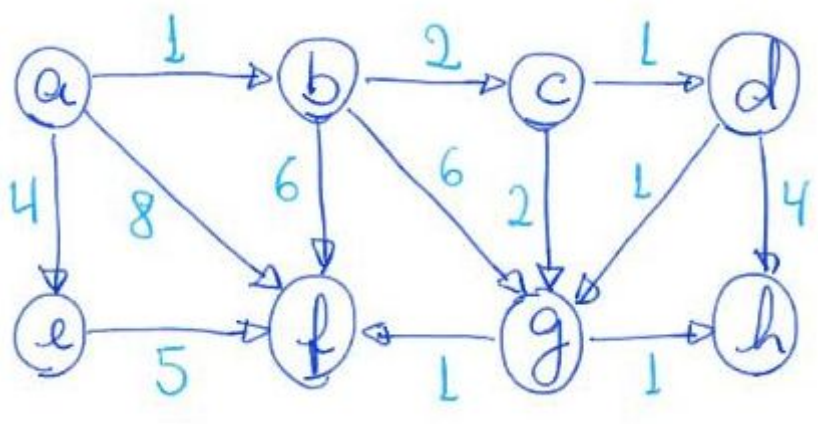
Sendo s nosso vértice origem, note que,

- se considerarmos todos os caminhos a partir de s
    - que chegam em um vértice v,
- e escolhermos o menor destes caminhos,
    - teremos o caminho de custo mínimo de s a v,
    - e o valor deste caminho é a distância desejada.

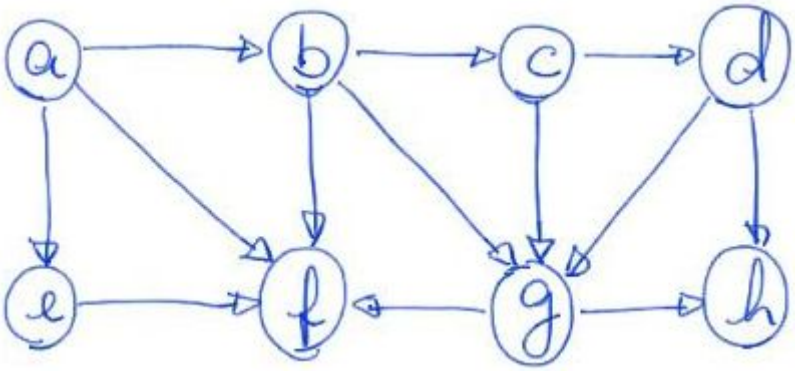
A ideia central do algoritmo é

- encontrar uma ordem para visitar os vértices do DAG,
    - que nos permita encontrar eficientemente
        - todos os caminhos que chegam em cada vértice.
- Como veremos a seguir, essa ordem é a ordenação topológica.

Considere o seguinte grafo dirigido acíclico com custos nos arcos.



Vamos encontrar uma ordenação topológica para este DAG.

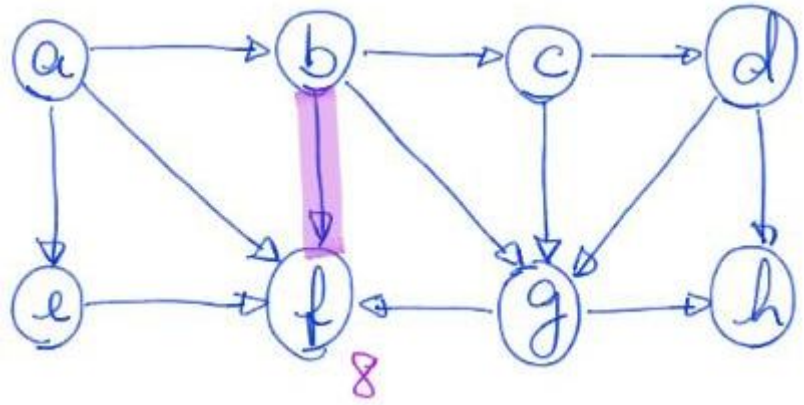


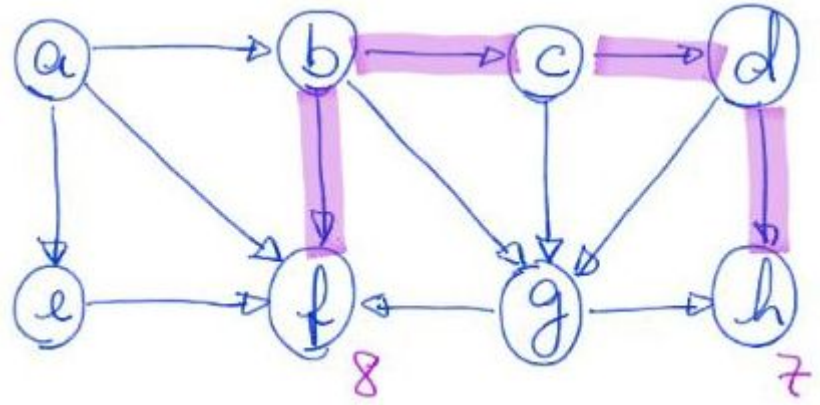
- Desconsideramos os custos nos arcos, pois eles não afetam a ordenação.

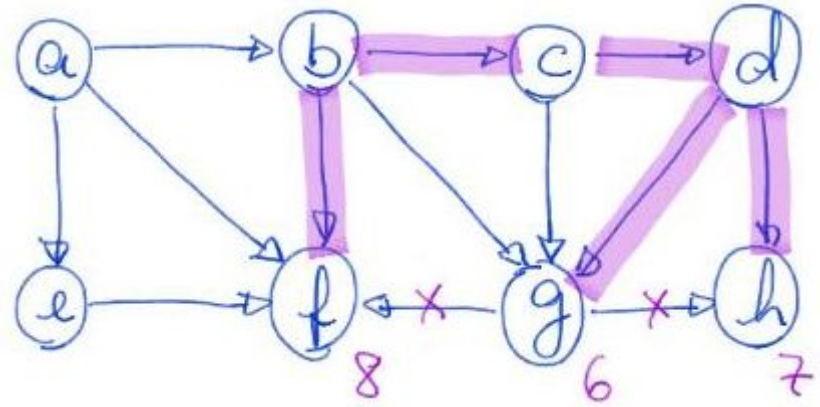
Para realizar a ordenação realizamos um loop da busca em profundidade,

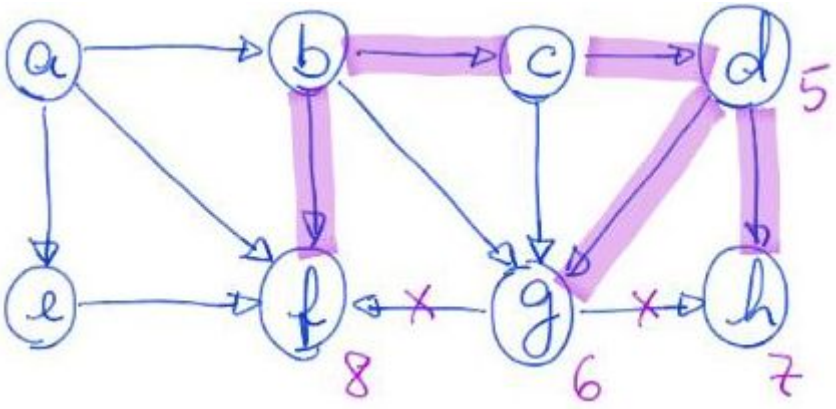
- i.e., invocamos a DFS a partir de cada vértice não visitado,
    - e esta rotula cada vértice que acabar de visitar
        - em ordem decrescente.

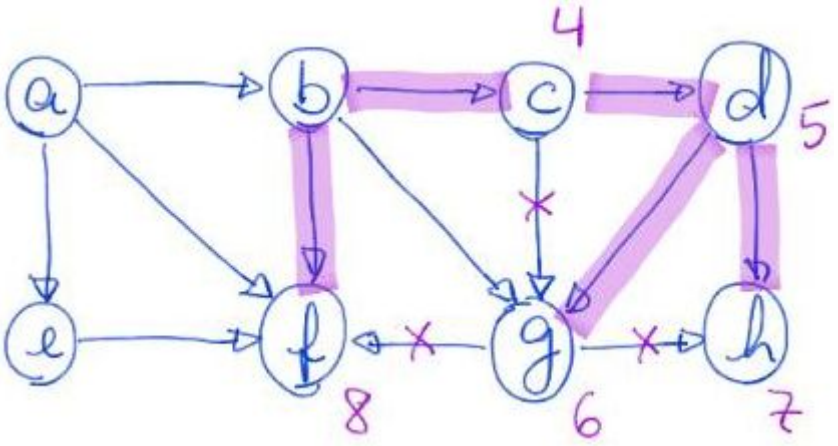
- 1ª DFS começa em b

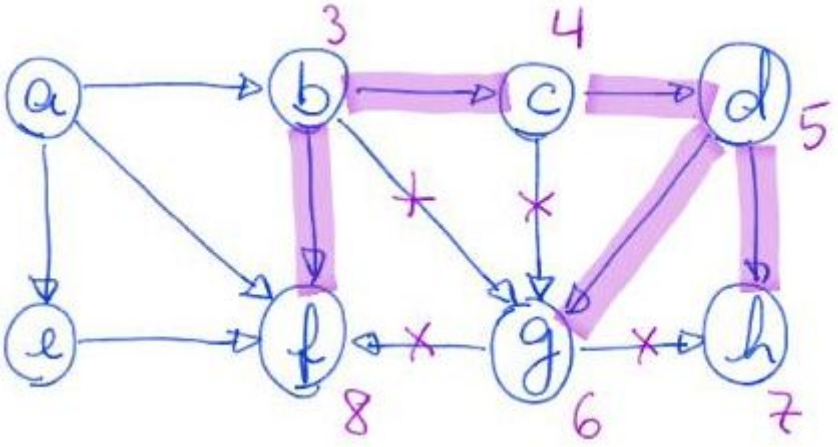




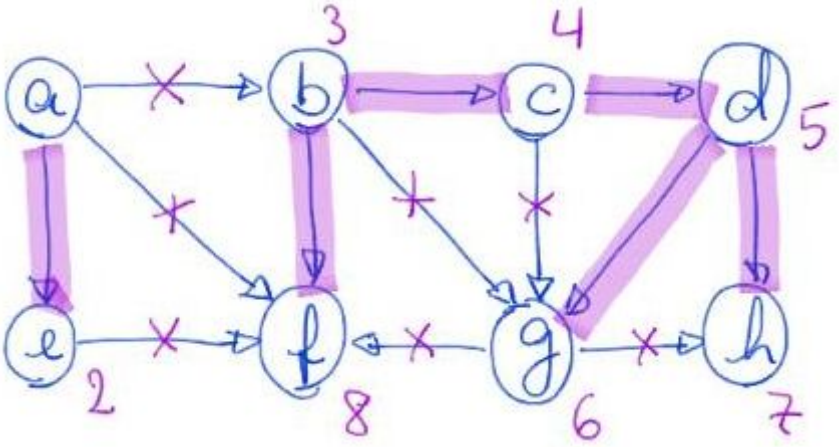


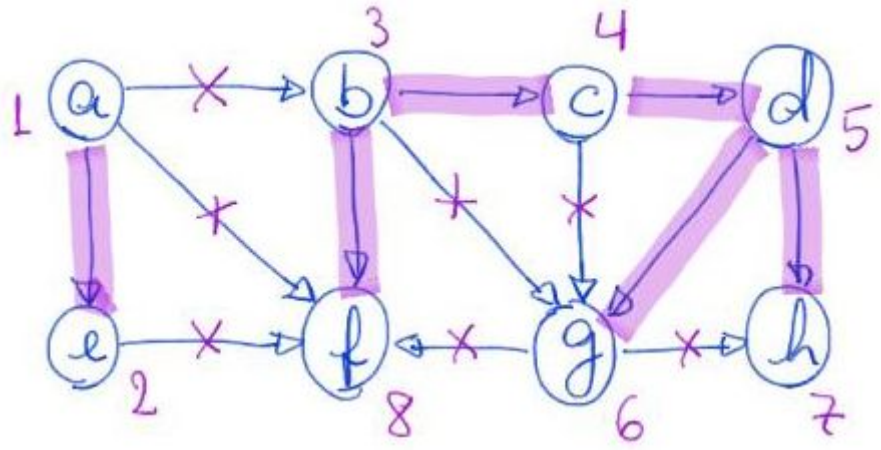




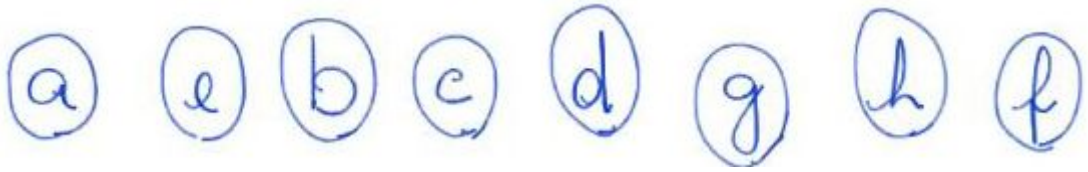


- 2ª DFS começa em a

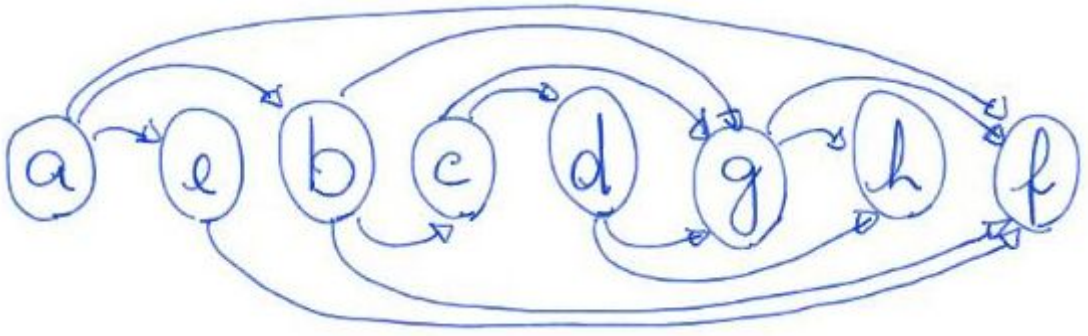




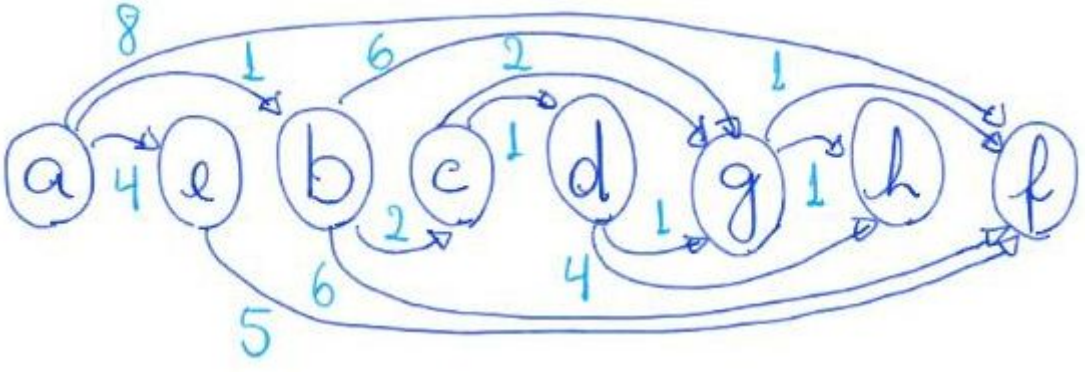
Linearizando o DAG segundo a ordem topológica encontrada



- Note que, como esperado, todos os arcos vão da esquerda para a direita.



- Agora voltamos a considerar os custos, já que vamos calcular as distâncias.



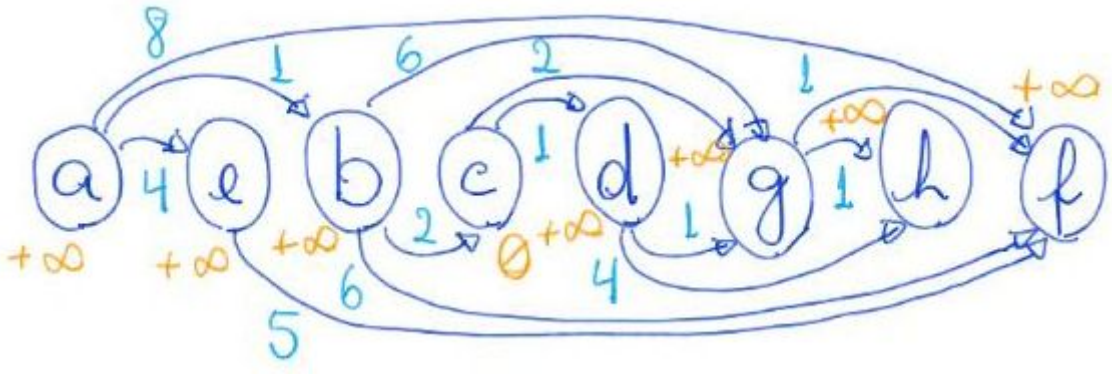
Marcamos cada vértice v em V com:

- dist[v] = +\inf
- pred[v] = NULL

A exceção é o vértice origem s, que começa com distância 0,

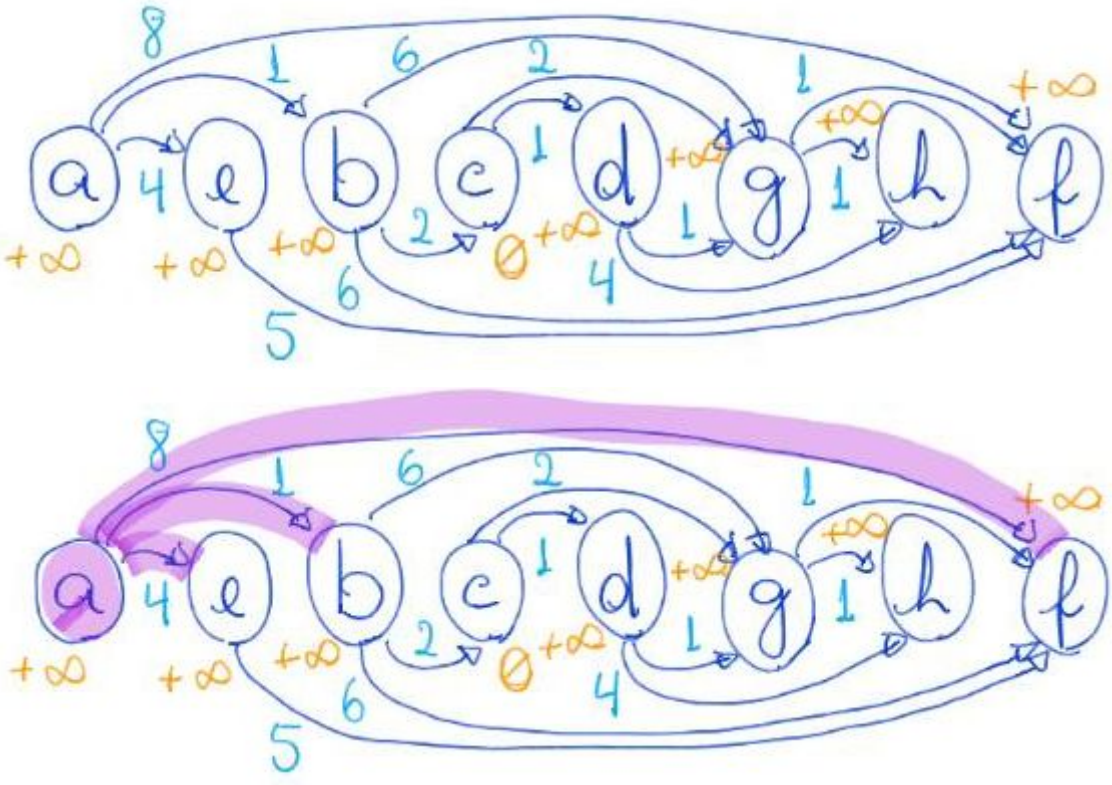
- i.e., dist[s] = 0.

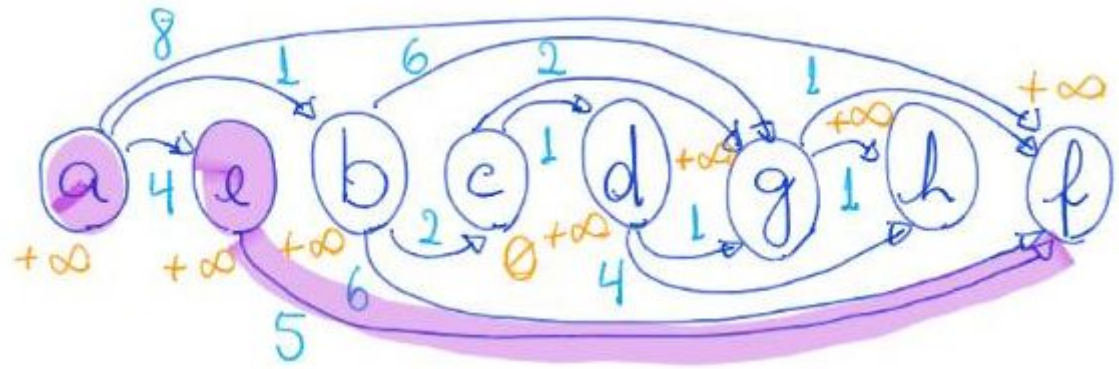
No nosso exemplo, seja c o vértice origem.

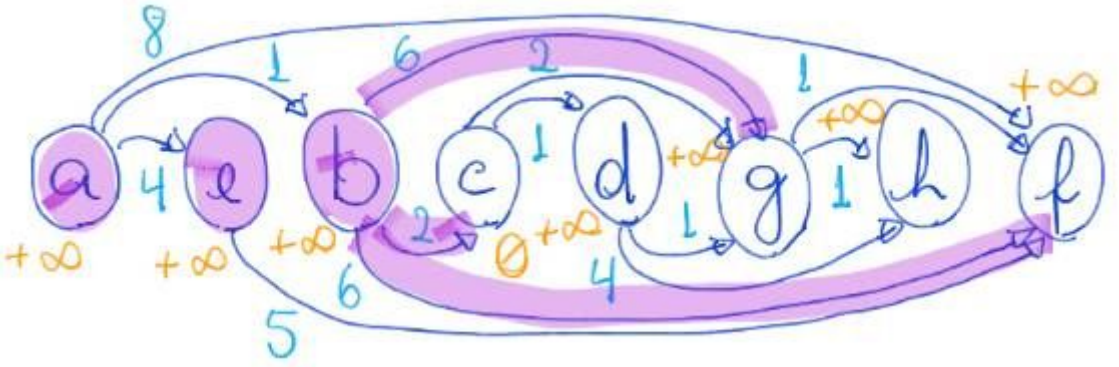


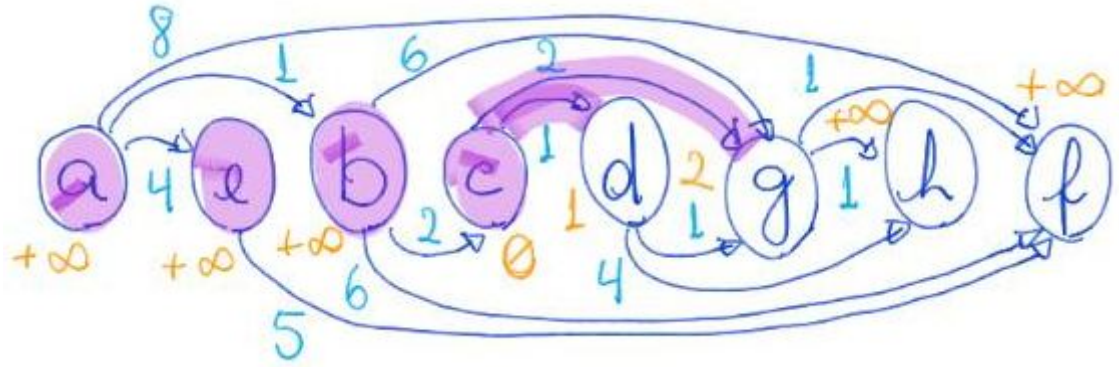
Agora, visitamos os vértices da esquerda para a direita,

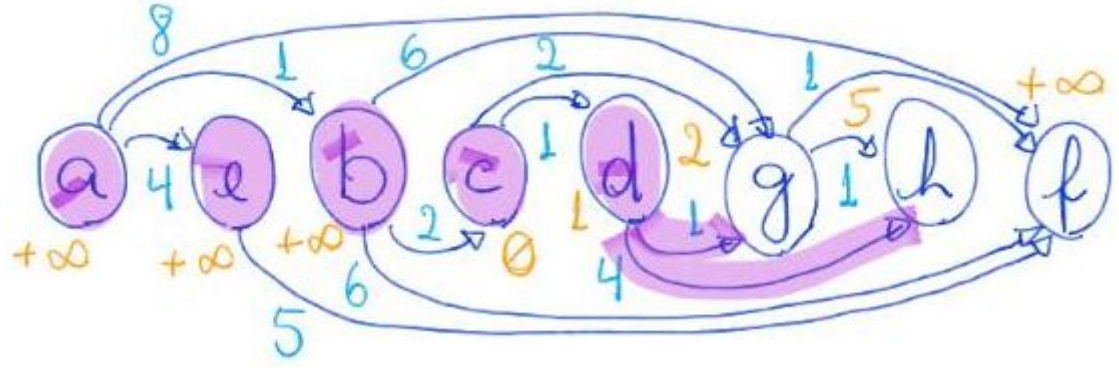
- i.e., seguindo a ordenação topológica,
- e em cada vértice visitado consideramos os arcos que saem dele.
- Para cada arco (u, v) considerado
    - se dist[u] + c(u, v) < dist[v] atualizamos
        - dist[v] = dist[u] + c(u, v)
        - pred[v] = u

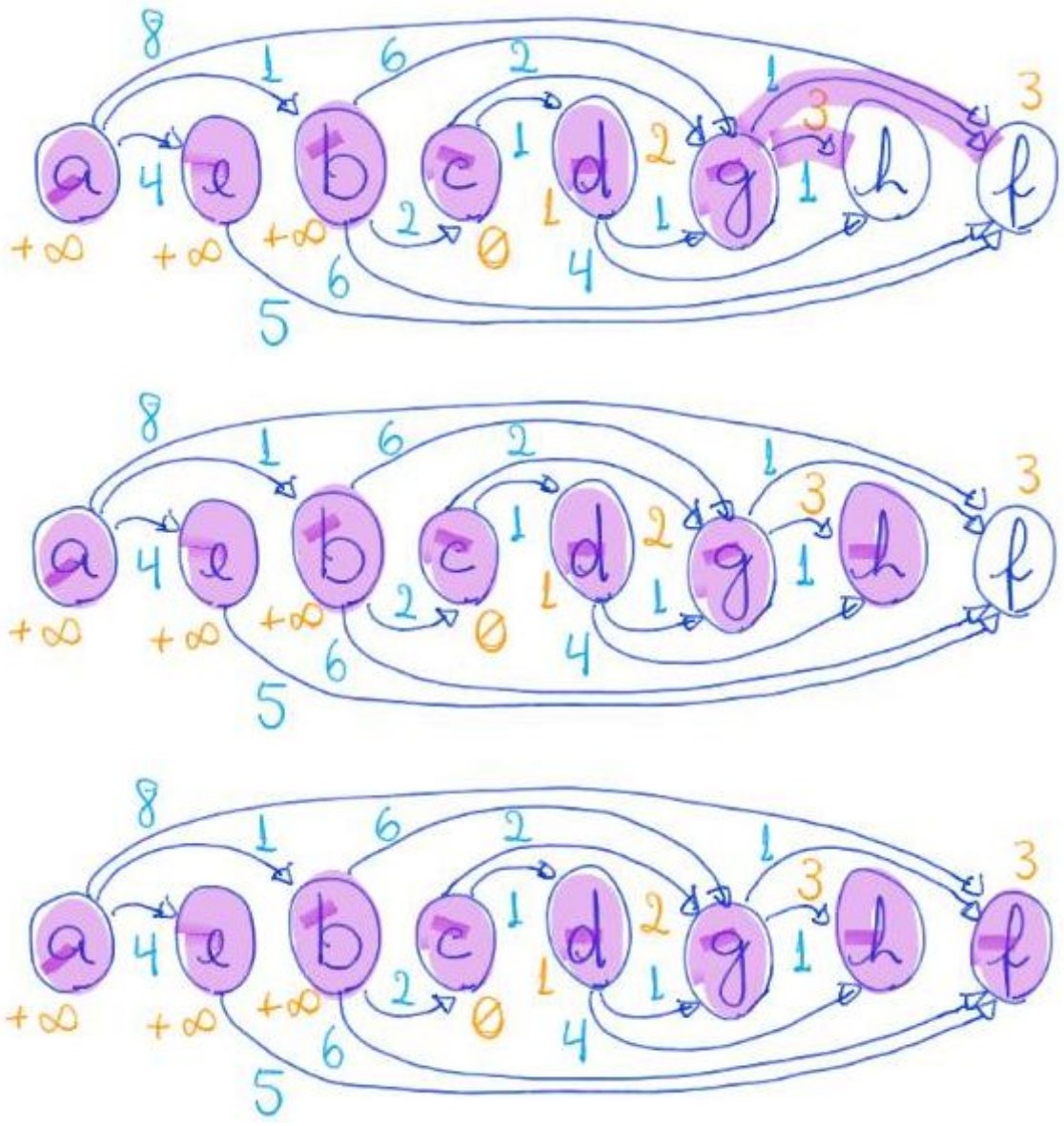



a
e
b
c
d
g
h
f
8
1
6
2
1
+∞
4
+∞
+∞
+∞
+∞
2
0
+∞
1
1
1
+∞
6
4
5


a
e
b
c
d
g
h
f
8
1
6
2
1
+∞
4
+∞
+∞
+∞
+∞
2
0
+∞
1
1
1
+∞
6
4
5


a
e
b
c
d
g
h
f
8
1
6
2
1
+∞
4
+∞
+∞
+∞
+∞
2
0
1
1
2
1
1
+∞
6
4
5


a
e
b
c
d
g
h
f
8
1
6
2
1
5
+∞
4
+∞
+∞
+∞
+∞
2
0
1
1
2
1
1
+∞
6
4
5

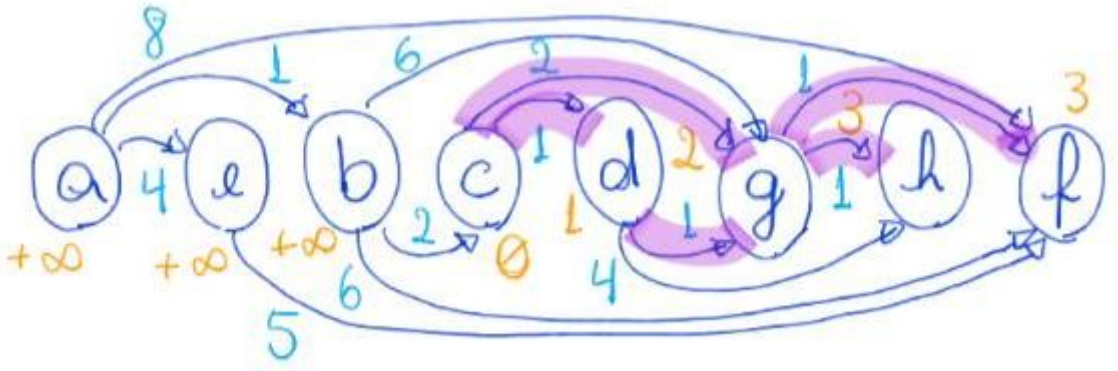


Note que, na iteração em que visitamos um vértice,

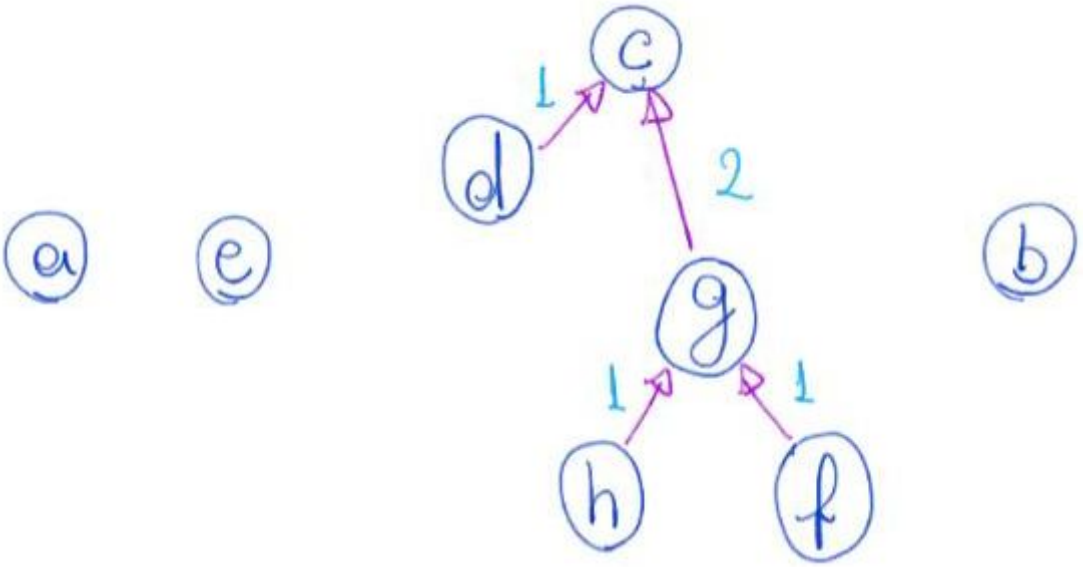
- todos os caminhos que chegam nele já foram considerados.
- Por isso, a distância da origem até o vértice é calculada corretamente.

Observe que, cada “apontador” no vetor pred corresponde

- ao antecessor de um vértice em seu caminho mínimo.
- Por isso, pred permite reconstruir os caminhos mínimos
    - da origem até cada vértice alcançável.



- Note que, esta coleção de caminhos
    - forma uma árvore de caminhos mínimos enraizada na origem.



Pseudocódigo do algoritmo:

```
distanciasDAG(DAG G=(V,E), custos c, vértice s) {
        para v \in V
                dist[v] = +\inf
                pred[v] = NULL
        dist[s] = 0

        ordem = ordenaçãoTopológica(G);
        para cada v \in V, seguindo ordem
                para cada arco (v, w)
                        se dist[w] > dist[v] + c(v, w)
                                dist[w] = dist[v] + c(v, w)
                                pred[w] = v
}
```

Um detalhe é que esta algoritmo funciona

- mesmo que os arcos tenha custos negativos,
    - pois em um DAG não é possível formar circuitos de custo negativo.
- Ele também pode ser adaptado para
    - o problema de encontrar caminhos de custo máximo,
        - que em geral é bem mais difícil,
            - justamente por ter de lidar com circuitos.

Eficiência:

- O(n + m), sendo n o número de vértices e m o número de arcos.
    - Resultado deriva da busca em profundidade (DFS)
    - e da passada linear pelos vértices,
        - em que cada arco é considerado uma única vez.
- Note que, assim como no algoritmo de Kosaraju
    - para encontrar componentes fortemente conexos
- é importante que a ordenação topológica devolva a ordem
    - em um vetor indexado pela posição de cada vértice
        - e cujos conteúdos são os rótulos dos vértices.

Código do algoritmo para cálculo de distâncias em um DAG:

```
void distanciasDAG(Graph G, int s, int *dist, int *pred){
   int i, *ordTopo;
   int v, w, custo;
   link p;

   for (i = 0; i < G->n; i++){
       dist[i] = __INT_MAX__;
       pred[i] = -1;
   }
   dist[s] = 0;

   ordTopo = malloc((G->n + 1) * sizeof(int));
   ordenacaoTopologica(G, ordTopo);

   for (i = 1; i <= G->n; i++){
       v = ordTopo[i];
       p = G->A[v];
       while(p != NULL){
           w = p->index;
           custo = p->cost; // aumento da estrutura do grafo para armazenar custos dos
arcos
           if (dist[w] > dist[v] + custo){
               dist[w] = dist[v] + custo;
               pred[w] = v;
           }
           p = p->next;
```

```
        }
    }
    free(ordTopo);
}
```

Código da ordenação topológica com pequenas modificações para esta aplicação:

```
void ordenacaoTopologica(Graph G, int *ordTopo)
{
    int i, k, *visitado;
    visitado = malloc(G->n * sizeof(int));
    /* inicializa todos como não visitados e sem ordem topologica */
    for (i = 0; i < G->n; i++)
    {
        visitado[i] = 0;
        ordTopo[i+1] = -1; // correção no índice porque ordenação vai de 1 a n
    }
    k = G->n;
    for (i = 0; i < G->n; i++)
        if (visitado[i] == 0)
            buscaProfOrdTopoR(G, i, visitado, ordTopo, &k);
    free(visitado);
}

void buscaProfOrdTopoR(Graph G, int v, int *visitado, int *ordTopo, int *pk)
{
    int w;
    link p;
    visitado[v] = 1;
    /* para cada vizinho de v que ainda não foi visitado */
    p = G->A[v];
    while (p != NULL)
    {
        w = p->index;
        if (visitado[w] == 0)
            buscaProfOrdTopoR(G, w, visitado, ordTopo, pk);
        p = p->next;
    }
    // ordenação armazenada em vetor indexado por posição
    ordTopo[*pk] = v;
    (*pk)--;
}
```

Algoritmo de Dijkstra

Agora vamos estudar um dos maiores clássicos da computação,

- o algoritmo de caminhos mínimos de Dijkstra.

Primeiro, vamos relembrar o algoritmo de busca em largura

- para cálculo de distâncias,
    - que é generalizado pelo algoritmo de Dijkstra.

```
distancias(grafo G=(V,E), vértice s) {
        para v \in V
                dist[v] = +\inf
        dist[s] = 0
        seja Q uma fila inicializada com o vértice s
        enquanto Q != \empty
                remova um vértice v do início de Q
                para cada aresta (v, w)
                        se w não foi visitado, i.e, dist[w] == +\inf
                                dist[w] = dist[v] + 1
                                insira w no final de Q
}
```

A seguir, para simplificar, vamos supor que todos os vértices do grafo

- são alcançados a partir do vértice s.
- Se esse não for o caso, podemos focar nos vértices alcançáveis
    - realizando uma busca a partir de s antes,
        - ou modificando levemente o algoritmo de Dijkstra.

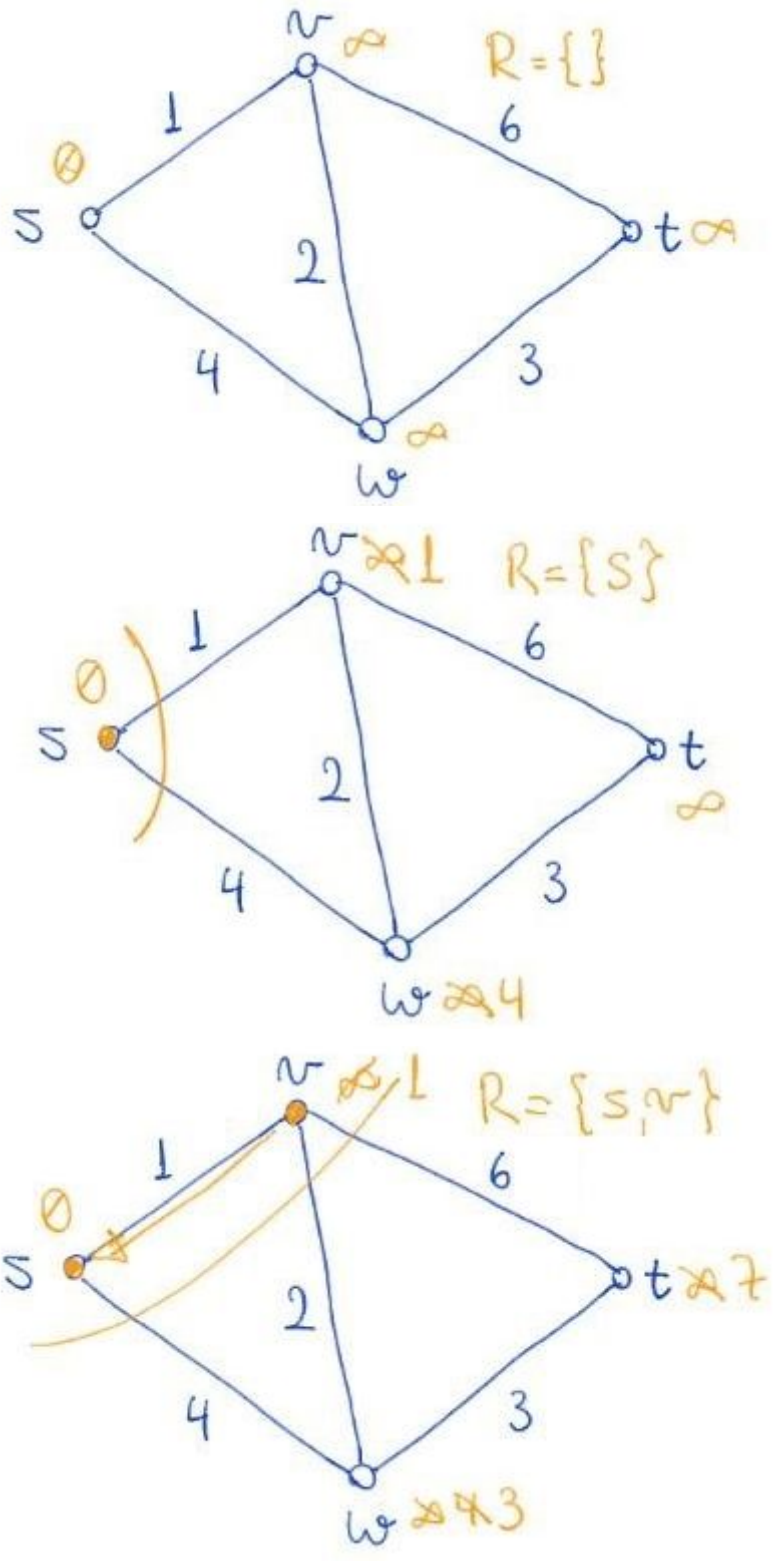
```
Dijkstra(grafo G=(V,E), custos c, vértice s) {
        para todo v \in V
                dist[v] = +\inf
                pred[v] = NULL
        dist[s] = 0
        R = {}
        enquanto R != V
                // escolha gulosa do algoritmo de Dijkstra
                pegar o vértice v em V \ R com menor valor de dist[]
                adicione v a R
                para toda aresta (v, w) com w em V \ R
                        se dist[w] > dist[v] + c(v, w)
                                dist[w] = dist[v] + c(v, w)
                                pred[w] = v
}
```

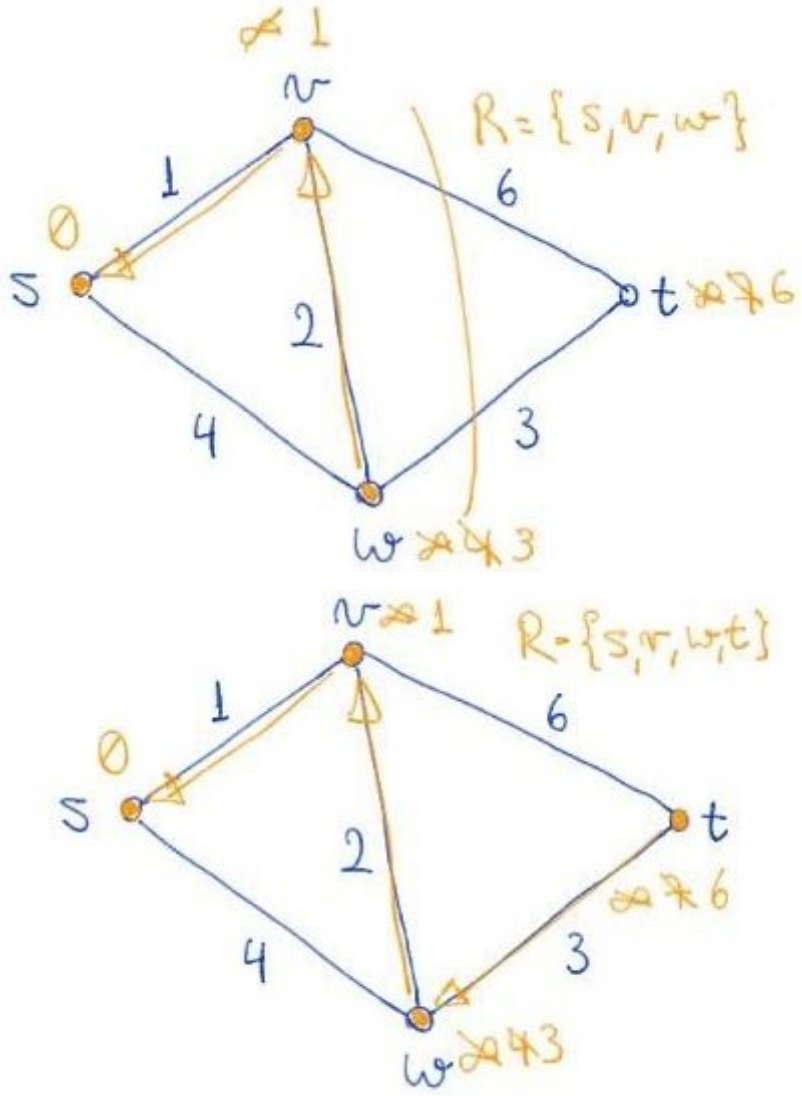
Notaram a semelhança com o algoritmo

- para cálculo de distâncias não ponderadas,
    - baseado na busca em largura?

- E com o algoritmo para cálculo de distâncias em DAGS,
    - baseado na busca em profundidade?

Exemplo de funcionamento do algoritmo:



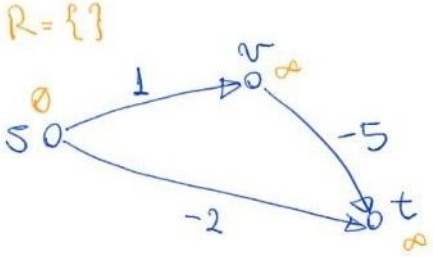


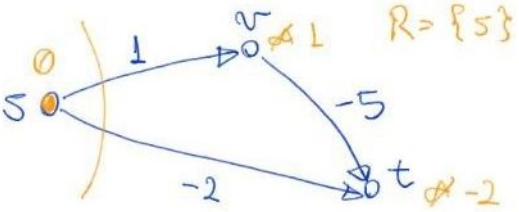
Antes de provarmos a corretude deste algoritmo,

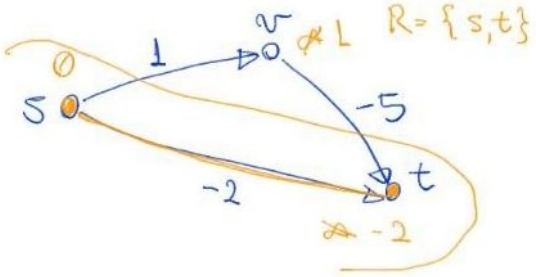
- de tratarmos dos detalhes de implementação e da eficiência do mesmo,
    - vamos analisar suas limitações.

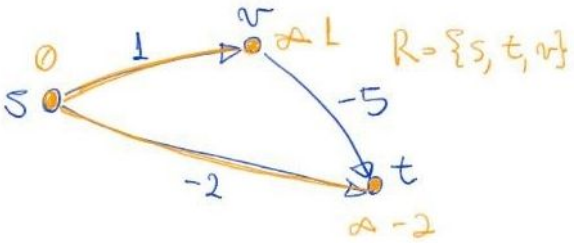
Em particular, este algoritmo pode não devolver a solução correta

- quando as arestas apresentam custo negativo.



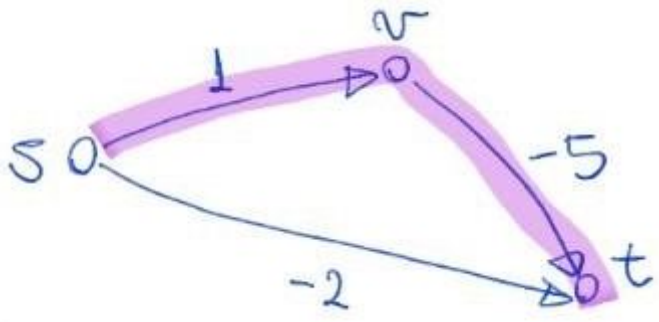






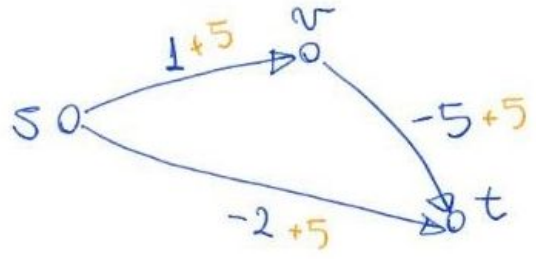
Isso ocorre porque a escolha gulosa pode definir

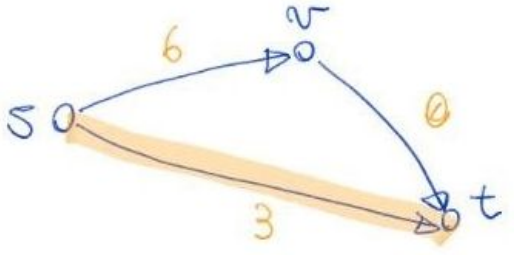
- uma certa distância para um vértice,
    - sem considerar um caminho que passa por outros vértices,
        - caso tal caminho “tenha” um custo maior na sua parte inicial,
            - ainda que depois este custo seja reduzido
                - por conta de arestas de custo negativo.
- No nosso exemplo, o caminho s → v → t, que tem custo -4,
    - nunca é considerado pelo algoritmo.



Poderíamos pensar em reduzir o problema com arestas negativas

- para o problema sem essas arestas.
- Uma tentativa seria somar o valor absoluto da aresta mais negativa
    - no comprimento de todas as arestas.
- Isso certamente faria com que o grafo não tivesse mais arestas negativas.





No entanto, o caminho mínimo entre os vértices seria alterado, pois

- caminhos com diferente número de arestas seriam afetados de modo distinto.

Como regra geral, se as soluções do seu problema

- tem número variado de objetos
    - (no caso de caminhos mínimos os objetos são as arestas)

- então somar um mesmo valor no custo de cada objeto
    - afetará mais o custo de soluções com maior cardinalidade,
    - e menos o custo daquelas com menor cardinalidade.
- Assim, não há garantia de que
    - a ordem relativa dos custos das soluções será preservado.
- Por isso, esse procedimento não é recomendado.

Por outro lado, se todas as soluções do seu problema

- tem a mesma cardinalidade,
    - i.e., o mesmo número de objetos,
- então somar um mesmo valor no custo de cada objeto
    - afetará homogeneamente o custo de todas as soluções.
- Neste caso, como a ordem relativa dos custos das soluções é preservada,
    - o procedimento é seguro.
- Este é o caso, por exemplo, no problema da árvore geradora mínima,
    - que é um problema central em otimização combinatória e grafos.