AED1 - Aula 26
Algoritmos de enumeração

Often it appears that
there is no better way to solve a problem
than to try all possible solutions.
This approach, called exhaustive search,
is almost always slow,
but sometimes it is better than nothing.
— Ian Parberry, Problems on Algorithms

Hoje vamos falar de alguns problemas de enumeração.

Para resolver certos problemas combinatórios,
- é necessário enumerar (i.e., fazer uma lista com)
    - todos os objetos de um determinado tipo.

O número de objetos a enumerar é tipicamente muito grande.
- Por isso, os algoritmos enumerativos costumam consumir muito tempo.
    - Mas, certas vezes é o melhor que podemos fazer, ou
        - ao menos é um ponto de partida.

Enumeração de subconjuntos por tamanho

Talvez, o mais comum desses problemas seja
- apresentar todos os subconjuntos de um conjunto S dado.

Como exemplo, dado S = {1, 2, 3}, seus subconjuntos são:

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$

Qual o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos?
- Resp.: 2^n, pois cada elemento pode ou não estar num subconjunto,
    - sendo assim responsável por dobrar o número de subconjuntos.

Nosso algoritmo vai gerar todos os subconjuntos do conjunto S,
- indo dos menores até os maiores. Note que,
    - o 1° será o conjunto vazio e o último será o próprio conjunto S.

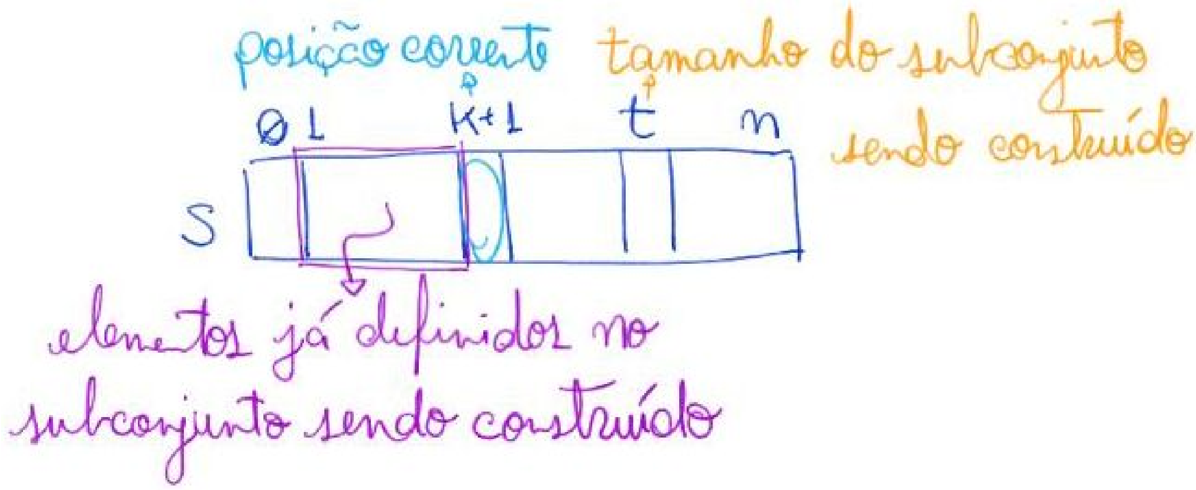
Os subconjuntos terão seus elementos exibidos em ordem crescente.

- Isso é importante para não gerar subconjuntos repetidos,
    - como {1, 2} e {2, 1}.

Os subconjuntos de mesmo tamanho serão exibidos em ordem lexicográfica,
- i.e., ordem alfabética utilizada em dicionários.
- Isso significa que os subconjuntos serão ordenados
    - considerando cada elemento da esquerda para a direita,
- e um subconjunto S aparecerá antes de outro subconjunto S’,
    - se o primeiro elemento distinto entre eles for menor em S que em S’.

A ideia do algoritmo é usar uma função recursiva,
- que gera todos os subconjuntos de um determinado tamanho t.
- Esta função recursiva será chamada por um laço externo,
    - que varia t entre 0 e n.

Os conjuntos sendo construídos pela função recursiva
- são armazenados em um vetor s,
    - que começa vazio,
        - e tem tamanho n + 1.



Cada chamada da função recursiva,
- considera que o subvetor s[1 .. k] tem um parte já definida
    - do subconjunto sendo construído.
- Assim, ela coloca cada elemento válido na posição corrente s[k + 1] e
    - faz uma chamada recursiva para preencher o restante do subconjunto.

Um elemento é válido para a posição s[k + 1]
- se ele é maior que o elemento em s[k],
    - já que geramos os subconjuntos em ordem crescente,
- e se existem suficientes elementos maiores que ele
    - para fazer o subconjunto atingir tamanho t.

Além disso, os elementos válidos são testados do menor para o maior,

- para gerar os subconjuntos em ordem lexicográfica.

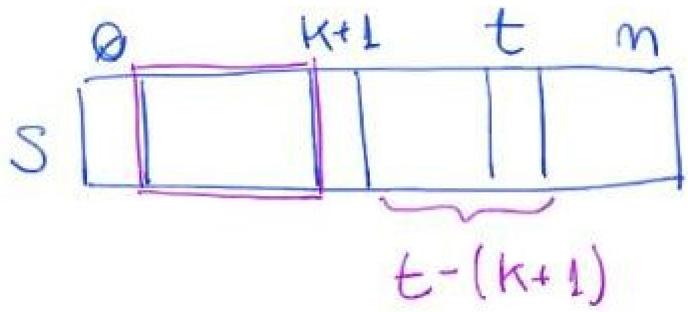
Código do algoritmo recursivo para gerar subconjuntos

```
void subConj(int n)
{
   int *s, t;
   s = malloc((n + 1) * sizeof(int));
   s[0] = 0;
   for (t = 0; t <= n; t++)
       subConjR(s, 0, t, n); // chamada que gera todos os subconjuntos de {1, ..., n} de
tamanho t
   free(s);
}

// função que gera todos os subconjuntos de {1, ..., n} de tamanho t que contém os
elementos em s[1 .. k]
void subConjR(int *s, int k, int t, int n)
{
   int i;
   if (t == k)
   {
       imprima(s, t);
       return;
   }
   // laço que testa todos os elementos válidos para a posição s[k + 1] em ordem crescente
   for (i = s[k] + 1; i <= n - (t - k) + 1; i++)
   {
       s[k + 1] = i;
       subConjR(s, k + 1, t, n);
   }
}
```

Se todo valor entre 1 e n é um elemento válido

- para colocar no subconjunto sendo construído,
  - por que no laço o limite superior para i é n - (t - (k + 1))?
- Observe que, como construímos nossos subconjuntos
  - exibindo os elementos em ordem crescente,
- depois de colocar um elemento em s[k + 1] qualquer elemento i
  - disponível para completar o subconjunto
- estará restrito entre s[k + 1] < i <= n,
  - ou seja, temos n - s[k + 1] opções para i.
- Por outro lado, como o subconjunto deve atingir tamanho t
  - e s já terá k + 1 elementos,
- precisaremos de pelo menos t - (k + 1) elementos para completá-lo.



- Assim, se um elemento $i > n - (t - (k + 1))$
  - for colocado na posição $s[k + 1]$,
- sobram $n - s[k + 1] = n - i < n - (n - (t - (k + 1))) = t - (k - 1)$ elementos,
  - que é menos do que precisamos para chegar ao tamanho t.

Qual a importância de s[0] começar igual a 0?

Eficiência:

- Pelo menos da ordem de 2^n,
  - uma vez que o algoritmo gera todos os subconjuntos.

Enumeração de subsequências em ordem lexicográfica

Uma subsequência é o que sobra de uma sequência

- quando alguns de seus termos são apagados.

Mais precisamente, uma subsequência de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ é

- qualquer sequência $s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ik}$,
  - com $1 \le i1 < i2 < \ldots < ik \le n$
- Note que, a ordem dos termos não é alterada.

Como exemplo, dada a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, temos as subsequências

- 2, 3, 5, 8
- 1, 4, 5, 7, 8
- 2, 3, 5

Nosso problema é:

- dado n, enumerar todas as subsequências de 1, 2, …, n, ou seja,
  - fazer uma lista em que cada subsequência aparece uma única vez.

Exemplos:

- Para n = 3

    1
    1 2

    1 2 3
    1 3
    2
    2 3
    3
- Para n = 4

    1
    1 2
    1 2 3
    1 2 3 4
    1 2 4
    1 3
    1 3 4
    1 4
    2
    2 3
    2 3 4
    2 4
    3
    3 4
    4

Note que, entre as subsequências de 1, 2, …, n
- e os subconjuntos de {1, 2, …, n},
    - há uma correspondência 1 para 1,
        - exceto pelo fato de não listarmos a sequência vazia.
- Por isso, o número de subsequências de 1, 2, …, n
    - é $2^n - 1$.

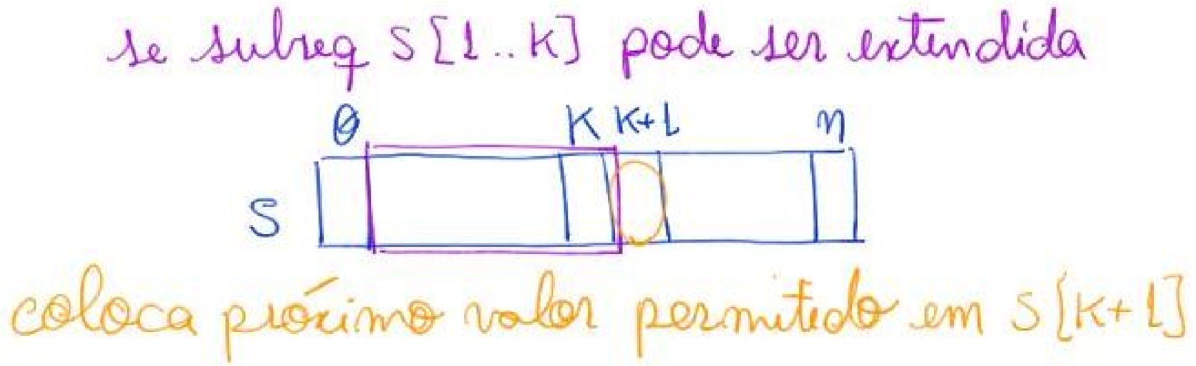
Um adendo para o nosso problema,
- queremos que as subsequências sejam listadas em ordem lexicográfica
    - que é a ordem do dicionário.

Mais precisamente, uma sequência $r_1, r_2, \dots, r_j$ é
- lexicograficamente menor que $s_1, s_2, \dots, s_k$ se
    - $j < k$ e $r_1, \dots, r_j$ igual a $s_1, \dots, s_j$ ou
    - existe i tal que $r_1, \dots, r_{i-1}$ igual a $s_1, \dots, s_{i-1}$ e $r_i < s_i$
- ou seja, $r_1, \dots, r_j$ é um prefixo de $s_1, \dots, s_k$ ou
    - as subsequências tem um prefixo comum
        - e o primeiro valor distinto é menor em $r_1, \dots, r_j$.

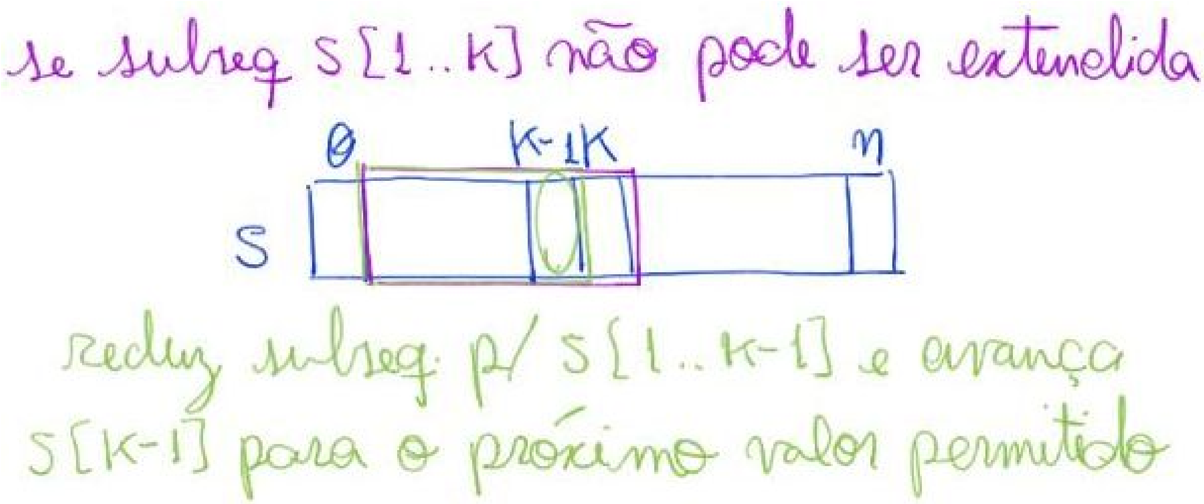
Destacamos que, em geral, a ordem das subsequências não é importante,

- mas pode nos ajudar a organizar nosso algoritmo.

Primeiro veremos um algoritmo iterativo para o problema,
- que constrói as subsequências em um vetor s e
    - cujas ideias podem ser ilustradas nas seguintes figuras



- Note que, uma sequência pode ser estendida
    - enquanto seu último valor não for n.
- Além disso, o próximo valor permitido para a posição k + 1,
    - para gerar as sequências em ordem lexicográfica,
        - é s[k] + 1.



- De modo semelhante, próximo valor permitido em s[k - 1],
    - que respeita a ordem lexicográfica,
        - é s[k - 1] + 1.

Código do algoritmo iterativo para gerar subsequências em ordem lexicográficas

```
void subSeqLex(int n)
{
   int *s, k;
   s = malloc((n + 1) * sizeof(int));
   s[0] = 0;
   k = 0;
   while (1)
```

```
    {
        if (s[k] < n)
        {
            s[k + 1] = s[k] + 1;
            k += 1;
        }
        else
        {
            s[k - 1] += 1;
            k -= 1;
        }
        if (k == 0)
            break;
        imprima(s, k);
    }
    free(s);
}
```

Eficiência:

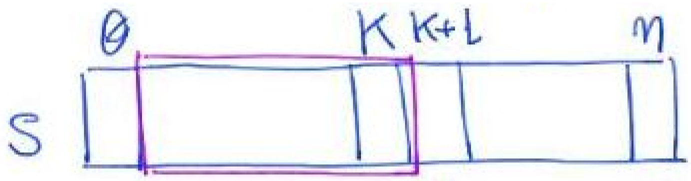
- Pelo menos da ordem de 2^n,
    - uma vez que o algoritmo gera todas as subsequências.

Agora veremos um algoritmo recursivo para o problema,

- cujas ideias podem ser ilustradas nas seguintes figuras.

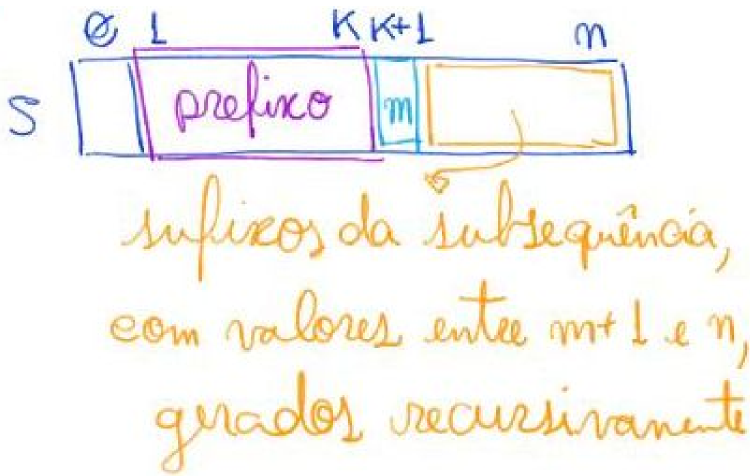
A função recursiva visa

- gerar todas as subsequências com prefixo s[1 .. k] em ordem lexicográfica.

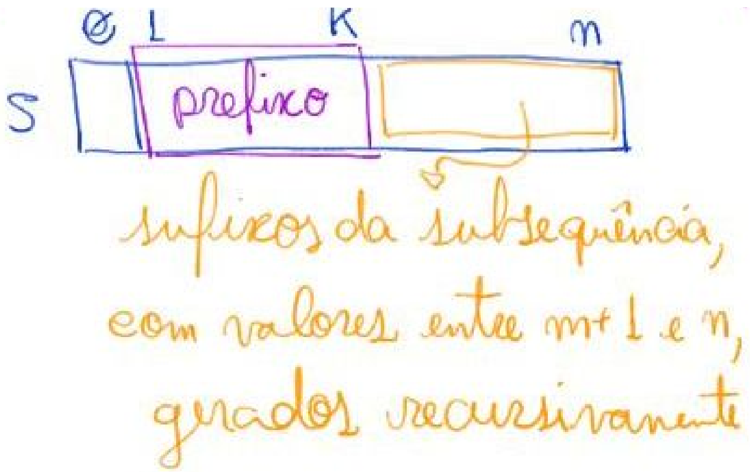


- Para cada elemento m válido para a posição s[k + 1],
    - sendo válido m entre s[k] < m <= n,
        - coloque m em s[k + 1] e imprima esta subsequência.

- Gere recursivamente todas as subsequências com prefixo s[1 .. k + 1],
    - sendo s[k + 1] = m.



- Gere recursivamente todas as subsequências com prefixo s[1 .. k]
  - e sem m no sufixo.



Código do algoritmo recursivo para gerar subsequências em ordem lexicográfica

```
void subSeqLex2(int n)
{
   int *s;
   s = malloc((n + 1) * sizeof(int));
   subSeqLexR(s, 0, 1, n);
   free(s);
}

void subSeqLexR(int *s, int k, int m, int n)
{
   if (m <= n)
   {
       s[k + 1] = m;
       imprima(s, k + 1);
       subSeqLexR(s, k + 1, m + 1, n); // inclui m
       subSeqLexR(s, k, m + 1, n);     // não inclui m
   }
}
```

- Note que, a ordem lexicográfica é garantida
    - pela posição da impressão e ordem das chamadas recursivas.

Enumeração de permutações

Agora veremos um problema de enumeração um pouco diferente,
- no qual o comprimento dos objetos enumerados não muda,
    - mas a ordem dos seus elementos é alterada.

Dada uma sequência, uma permutação da mesma é
- qualquer sequência em que cada elemento da original
    - apareça uma e apenas uma vez.

Nosso problema é, dado um inteiro positivo n,
- gerar todas as permutações da sequência identidade 1, 2, …, n.

Como exemplo, para n = 3, temos

1, 2, 3
1, 3, 2
2, 1, 3
2, 3, 1
3, 1, 2
3, 2, 1

Note que, o número de permutações
- de uma sequência de comprimento n,
    - que não tem elementos repetidos,
        - é n * (n - 1) * … * 2 * 1 = n!
- Isso porque, qualquer dos n elementos pode aparecer na primeira posição,
    - qualquer dos n - 1 restantes pode aparecer na segunda,
        - e assim por diante.
- Exercício: fazer a demonstração formal da intuição anterior,
    - usando indução matemática.

Novamente, vamos gerar nossas permutações em ordem lexicográfica.
- Exercício: analise, no algoritmo, que decisão de projeto gera esse resultado.

A seguir apresentamos um algoritmo recursivo para esse problema,
- cuja ideia central é construir incrementalmente as permutações.

Assim, dado um prefixo da permutação no subvetor s[1 .. k],
- o algoritmo coloca cada um dos elementos válidos na posição s[k + 1],

    - sendo válidos elementos que não aparecem em s[1 .. k]
- e gera recursivamente as permutações
    - que irão preencher o sufixo s[k + 2 .. n] do subvetor.

Código do algoritmo recursivo para gerar permutações

```
void permR(int *s, int k, int n)
{
   int i;
   if (k == n)
   {
       imprima(s, n);
       return;
   }
   for (i = 1; i <= n; i++)
   {
       if (!presente(s, k, i))
       {
           s[k + 1] = i;
           permR(s, k + 1, n);
       }
   }
}

void perm(int n)
{
   int *s;
   s = malloc((n + 1) * sizeof(int));
   permR(s, 0, n);
   free(s);
}

int presente(int *v, int n, int x)
{
   int i;
   for (i = 1; i <= n; i++)
       if (v[i] == x)
           return 1;
   return 0;
}
```

Eficiência:

- o algoritmo leva pelo menos tempo da ordem de n!,
    - uma vez que o algoritmo gera todas as permutações,
- mas ao considerarmos o tempo que ele gera para preencher
    - cada posição de uma permutação,
- esse tempo é ainda maior.